UCSAL
UNIVERSIDADE
CATÓLICA
DO SALVADOR

FÁBIO RENATO DE ANDRADE SANTOS
LAÍNE SANTOS DA SILVA

FRAÇÕES CONTÍNUAS, DETERMINANTES E EQUAÇÕES DIOFANTINAS. QUAL RELAÇÃO EXISTE ENTRE ELES?

SALVADOR
DEZ / 2023

FÁBIO RENATO DE ANDRADE SANTOS
LAÍNE SANTOS DA SILVA

FRAÇÕES CONTÍNUAS, DETERMINANTES E EQUAÇÕES DIOFANTINAS. QUAL RELAÇÃO EXISTE ENTRE ELES?

TCC apresentado a Escola de Licenciatura e Humanidades da Universidade Católica do Salvador, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciados em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Me. Odete Amanda Guerreiro Rodrigues Martinez.

SALVADOR

DEZ / 2023

FÁBIO RENATO DE ANDRADE SANTOS
LAÍNE SANTOS DA SILVA

FRAÇÕES CONTÍNUAS, DETERMINANTES E EQUAÇÕES DIOFANTINAS. QUAL RELAÇÃO EXISTE ENTRE ELES?

TCC apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática da Universidade Católica do Salvador.

Salvador, 18 de dezembro de 2023.

Banca Examinadora:

Prof.ª Me. Érica Nogueira Macedo

Prof. Me. João Luciano de Carvalho Gomes

Prof.ª Me. Odete Amanda Guerreiro Rodrigues Martinez

AGRADECIMENTO

Há alguns anos atrás, estávamos nós, ansiosos, por essa nova etapa da vida. O amor pela Matemática já era algo nítido, observado através das pequenas ações de criatividade e solução de problemas cotidianos. Muitos desafios se misturavam com a vontade de realizar mais um grande sonho: o de ensinar.

Como citou Eliabe Serafim: "Quem nasce com o dom de ensinar, não se perde com o tempo, e sim leva-o para eternidade". E quando a gente fala em dom, imediatamente pensamos nos nossos professores João e Odete, que estiveram ao nosso lado desde o ínicio, com dedicação, entrega, troca de experiências, alegria, entusiasmo nas aulas, etc.

Para eles, dizemos agora o nosso muito obrigado, por toda inspiração que exercem em nossas vidas. Em especial, um agradecimento a Pró Odete, nossa orientadora, que é sinônimo de sabedoria, força, cuidado e tantas outras qualidades que nos ajudaram na completude deste trabalho.

Por todo um esforço conjunto que nos eleva até aqui, precisamos agradecer a Deus e aos companheiros de jornada: amigos, colegas e familiares. Sem vocês nada disso seria real! Muito obrigado.

O Senhor é a minha força e o meu escudo; nele o meu coração confia, e dele recebo ajuda. Meu coração exulta de alegria, e com o meu cântico lhe darei graças.

Salmos 28:7

EPÍGRAFE

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender.”

Paulo Freire

RESUMO

O presente trabalho se propõe a apresentar um estudo sobre a teoria de Frações Contínuas, um dos mais belos assuntos da Matemática elementar, sendo ainda hoje considerado tema de pesquisa. Falaremos desde o contexto histórico, sua definição e propriedades até à relação existente com determinantes e equações diofantinas lineares. Para isso, além dos exemplos, apresentamos alguns teoremas que ilustram essas propriedades e a representação de um número racional na forma de fração contínua. Este material apresenta as vantagens da aplicação das frações contínuas em alguns procedimentos algébricos, dando-lhes uma agilidade de resolução e precisão.

Palavras-chave: Frações Contínuas, Matemática, Determinantes, Equações Diofantinas, Números Racionais, Propriedades.

ABSTRACT

This work aims to present a study on the theory of Continued Fractions, one of the most beautiful topics in elementary mathematics, still considered a subject of research today. We will discuss its historical context, definition, and properties, exploring its connection with determinants and linear Diophantine equations. In addition to examples, we provide theorems illustrating these properties and the representation of a rational number in the form of a continued fraction. This material highlights the advantages of applying continued fractions in certain algebraic procedures, enhancing resolution efficiency and precision.

Keywords: Continued Fractions, Mathematics, Determinants, Diophantine Equations, Rational Number, Properties.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 7
2. DESENVOLVIMENTO 8
    2.1. Contexto Histórico 9
    2.2. O Algoritmo de Euclides e as frações contínuas 14
    2.3. Frações reduzidas 17
    2.4. Determinação da n-ésima reduzida 19
    2.5. Propriedades das reduzidas 22
    2.6. Frações contínuas periódicas 25
    2.7. Frações contínuas e determinantes 27
    2.8. Frações contínuas e Equações Diofantinas 30
3. CONSIDERAÇÕES FINAIS...36
4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 37

1 INTRODUÇÃO

A Matemática básica, como o próprio adjetivo já diz, vem da palavra “base”, algo que serve de suporte, aquilo onde se apoiam outras coisas. É a ferramenta que engloba habilidades, conceitos e operações mais simples da Aritmética (números), aplicada para desenvolver a Álgebra (uso de letras) e a Geometria (uso de figuras).

É o passo inicial para a construção de novos saberes, adquiridos amplamente desde a infância até o ensino fundamental, visando o entendimento e domínio suficientes para o alcance de níveis mais altos, que completam uma formação satisfatória para todo educando.

As frações contínuas são uma forma de representação que traz mais praticidade para o cálculo matemático. A maneira de representar números reais na forma de fração contínua é bem mais precisa do que a representação decimal no caso dos irracionais, racionais finitos e periódicos, por exemplo. Considerando a aproximação de um número real por um racional, num outro aspecto das frações contínuas, é possível obter frações parciais que são chamadas convergentes ou reduzidas. Essas são frações que aproximam o número real, obtidas a partir da consideração de uma quantidade finita de coeficientes da sua representação por frações contínuas. Esses coeficientes são os quocientes obtidos quando utilizamos o algoritmo de Euclides.

Dada a fração contínua de um número qualquer, é possível, simplesmente usando as operações aritméticas usuais, aproximá-la por frações irredutíveis, que são as suas reduzidas.

As frações contínuas possuem relação com alguns conceitos expostos nas matrizes curriculares da Educação Básica: noções de aproximação e convergência, matrizes e determinantes. Além disso, é de grande importância na análise diofantina, ramo da teoria dos números que trata os problemas do contidiano que podem ser modelados por equações diofantinas.

Quantas cédulas de R$ 5,00 e quantas cédulas de R$ 10,00
são necessárias para formar R$ 100,00?

2 DESENVOLVIMENTO

Neste tópico apresentaremos a definição, alguns exemplos, propriedades das frações contínuas e também sua relação com os determinantes e as equações diofantinas.

Definição 1

Um número racional pode ser representado de várias maneiras. Por exemplo, o número 0,5 também pode ser escrito na forma $\frac{1}{2}$, bem como $\frac{5}{10}$.

A escolha da melhor representação irá depender de como o número será utilizado ou de quais operações serão realizadas. Uma fração contínua, também chamada fração continuada, é uma forma importante de representar números reais.

Em geral, uma fração contínua é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}},$$

em que o primeiro termo, a_0, é um número inteiro e os demais números $a_1, a_2, \ldots$, $b_1, b_2, \ldots$, são números inteiros positivos.

Quando os números b_i são iguais a 1, as frações contínuas são denominadas simples.

Uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

é uma fração contínua simples e finita, que pode ser denotada por $[a_0 ;\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$.

No caso em que a representação seja $[a_0 ;\ a_1, a_2, a_3, \ldots]$, se tem uma fração contínua simples e infinita.

Observe que o termo a_0 é separado por ponto e vírgula para evidenciar que este é a parte inteira do número representado.

Exemplo 1

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = [1; 2, 3].$$

Exemplo 2

$$\frac{3}{4} = 0 + \frac{3}{4} = 0 + \frac{1}{\frac{4}{3}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = [0; 1, 3].$$

Exemplo 3

$$\frac{-18}{5} = -4 + \frac{2}{5} = -4 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = -4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = [-4; 2, 2].$$

Neste último exemplo, é possível verificar que -4 é o maior inteiro que é menor do que $\frac{-18}{5}$.

As frações contínuas, como veremos mais adiante, têm muitas propriedades relacionadas ao Algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros.

2.1 Contexto Histórico

A origem das frações contínuas é historicamente dubitável, pois não existe uma data que marque o início da utilização de tal conceito. Segundo Lima (2010, p. 3 – 7), Andrade e Bracciali (2005, p. 4 – 7), as frações contínuas são conhecidas ao longo da história da Matemática. Em todas as antigas obras matemáticas gregas e árabes é possível encontrar exemplos e vestígios de frações contínuas.

O algoritmo euclidiano (325aC – 265aC), teve grande influência no estudo das frações contínuas. Essa influência perdurou até as pesquisas realizadas por matemáticos dos séculos XVII e XVIII como Leonhard Euler, Hermite, John Wallis, Lambert e Lagrange. Atualmente, as frações contínuas são de grande interesse em diversas áreas do campo matemático, como a teoria dos números, na resolução de equações diofantinas, na ciência da computação, na criação de algoritmos para calcular aproximações racionais de números reais, além de sua aplicação em problemas físicos.

No século V, havia vestígios do desenvolvimento de frações contínuas. Por exemplo, diz-se que Aryabhata (476 DC), um matemático hindu, usou um método semelhante para encontrar soluções inteiras de equações com uma ou mais incógnitas. As famosas equações Diofantinas têm o nome do matemático grego Diofanto de Alexandria (250 a.C.), mas Aryabhata não as resolveu em geral, ele só usou as frações contínuas em exemplos específicos. Foi o matemático hindu Bháskara quem generalizou o processo de resolução de equações diofantinas por um processo semelhante à expansão de uma fração contínua de um número, conforme veremos na seção 2.8.

Figura 1: Aryabhata. FONTE: BRITANNICA

As frações contínuas continuaram a ser significativas na Europa do século XVI, quando os cientistas bolonheses Rafael Bombelli (1526 d.C. - 1572 d.C.) e Pietro Antonio Cataldi (1548 d.C. - 1626 d.C.) deram suas contribuições na área, embora apenas forneçam mais alguns exemplos.

Bombelli encontrou uma boa aproximação para a raiz quadrada de 13 utilizando uma fração do tipo:

$$\sqrt{13} \cong 3 + \cfrac{4}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} = 3 + \cfrac{4}{6+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}} = 3 + \cfrac{4}{6+\frac{2}{3}}$$

$$= 3 + \cfrac{4}{\frac{20}{3}} = 3 + \frac{4\cdot 3}{20} = 3 + \frac{3}{5} = \frac{18}{5}.$$

$$\left(\sqrt{13} = 3{,}60555\ldots \qquad \frac{18}{5} = 3{,}6\right)$$

Figura 2: Rafael Bombelli. FONTE: ALCHETRON

Pietro Cataldi (1548 d.C. - 1626 d.C.), no entanto, encontrou uma boa aproximação para a raiz quadrada de 18, dada por :

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \dots}}}.$$

Figura 3: Pietro Cataldi. FONTE: ALCHETRON

Considerado o homem por trás do símbolo do infinito, John Wallis (1616 d.C. - 1703 d.C.), utilizou o termo “fração contínua” em seu livro “Opera Mathematica” (1695), demonstrou o cálculo do n-ésimo convergente através dos seus fundamentos básicos e descobriu algumas de suas propriedades, o que contribuiu para o desenvolvimento do cálculo infinitesinal e descoberta de séries infinitas.

Figura 4: John Wallis. FONTE: INDIA TODAY

As realizações matemáticas de Brouncker inclui trabalhos sobre frações contínuas e logaritmos através de cálculo por séries infinitas. Em 1655, ele forneceu uma expansão na forma de fração contínua do número real $\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \dots}}}}}.$$

Figura 5: Willian Brouncker. FONTE: THE PEERAGE

Leonard Euler (1707 d.C. - 1783 d.C.), grande matemático e físico, demonsrou em sua obra “De Fraction lous Continous”, que cada racional pode ser escrito como uma fração contínua finita e provou que os irracionais são expressos na forma de fração contínua infinita. Nessa obra uma das constantes estudadas é o número $e \cong 2{,}7182818\ldots$, que é expresso na forma de fração contínua como $e = [2; 1, 2,1,1, 4,1,1, 6, \dots]$.

Do Cálculo Diferencial, sabemos que $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Figura 6: Leonard Euler. FONTE: GRUPO ESCOLAR

Joseph-Louis Lagrange (1736 d.C. - 1813 d.C), matemático italiano, provou através de um teorema, que as soluções irracionais de equações quadráticas têm representação periódica na forma de fração contínua.

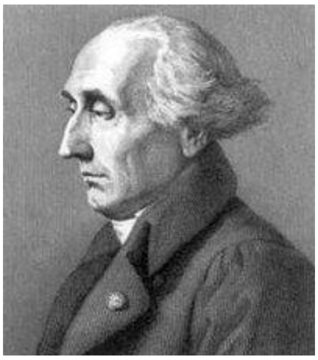

Figura 7: Joseph-Louis Lagrange. FONTE: UNICETRO

Considerado o pai da Geometria, Euclides foi um grande matemático de Alexandria, e teria nascido nessa região por volta do ano 300 a.C.

Historicamente, Euclides é considerado um dos grandes professores de Matemática de Alexandria e teria importantes publicações a respeito da música, astronomia, dentre outras áreas do conhecimento, das quais teve maior destaque a geometria. Ele escreveu o livro “Elementos”, sua maior obra que tem treze volumes.

Figura 8: Euclides. FONTE: EBIOGRAFIA

A obra "Elementos" é considerada o livro mais importante para o estudo da Geometria. Em seu trabalho, ele reuniu todo o conhecimento matemático de sua época em um sistema coerente e compreensível. Todos os fragmentos surgem das necessidades práticas do uso de aritmética, geometria plana, teoria das proporções e geometria sólida.

Além da geometria, a obra trata também de álgebra elementar e teoria dos números e traz teoremas que foram provados por Tales, Pitágoras, Platão, dentre outros estudiosos que o precederam. Esta publicação contém treze volumes e no sétimo volume, Euclides demonstrou o processo das divisões sucessivas, comumente conhecido como Algoritmo euclidiano da divisão, utilizado para encontrar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros. Esse processo também é utilizado para solução de Equações Diofantinas Lineares.

2.2 O Algoritmo de Euclides e as frações contínuas

O Algoritmo de Euclides é utilizado para o cálculo do máximo divisor comum de dois números inteiros, onde há uma divisão sucessiva do maior pelo menor até o resto convergir a zero, conforme podemos oberservar abaixo:

$$
\begin{aligned}
a &= b \cdot q_0 + r_0, \qquad 0 < r_0 < b \\
b &= r_0 \cdot q_1 + r_1\,, \qquad 0 < r_1 < r_0 \\
r_0 &= r_1 \cdot q_2 + r_2\,, \qquad 0 < r_2 < r_1 \\
&\vdots \\
r_{n-3} &= r_{n-2} \cdot q_{n-1} + r_{n-1}\,, \qquad 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\
r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n
\end{aligned}
$$

Desse modo, se $r_n = 0$, o processo das divisões sucessivas chegará ao fim, na primeira equação ou após determinado número de divisões, e r_{n-1} será o m.d.c de a e b.

Definição 2

Sendo $a, b \in \mathbb{Z}$ não nulos, dizemos que um determinado $c \in \mathbb{Z}_+^*$ é o máximo divisor comum de a e b se $c|a$ e $c|b$ e para todo inteiro, d divisor de c, $d|a$ e $d|b$.

O cálculo do mdc de a e b, usando o algoritmo de Euclides, também pode ser usado para encontrar uma representação finita de números racionais por meio de frações contínuas.

Do desenvolvimento anterior, segue que

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{r_0}}$$

$$= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n}}}}.$$

Portanto, $[q_0 ;\ q_1, q_2, \dots, q_n]$ é a expansão de $\frac{a}{b}$ como fração contínua.

Exemplo 4

Expandir $\frac{124}{38}$ em fração contínua, usando o algoritmo de Euclides.

	3	3	1	4
124	38	10	8	2
10	8	2	0	

$(i)\ \ 124 = 38 \cdot 3 + 10 \quad \longrightarrow \quad \frac{124}{38} = 3 + \frac{10}{38}$

$(ii)\ \ 38 = 10 \cdot 3 + 8 \quad \longrightarrow \quad \frac{38}{10} = 3 + \frac{8}{10}$

$(iii)\quad 10 = \ 8 \cdot 1 + 2 \quad \longrightarrow \qquad \frac{10}{8} = 1 + \frac{2}{8}$

$(iv)\quad \ 8 = \ 2 \cdot 4 + 0 \quad \longrightarrow \qquad \frac{8}{2} = 4$

$$\frac{124}{38} = 3 + \frac{10}{38} = 3 + \frac{1}{\frac{38}{10}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{8}{10}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{10}{8}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{2}{8}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{8}{2}}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = [3; 3,1,4].$$

Exemplo 5

Expandir $\frac{37}{13}$ em fração contínua, usando o algoritmo de Euclides.

	2	1	5	2
37	13	11	2	1
11	2	1	0	

$(i)\quad 37 = 13 \cdot 2 + 11 \quad \longrightarrow \quad \frac{37}{13} = 2 + \frac{11}{13}$

$(ii)\quad 13 = 11 \cdot 1 + 2 \quad \longrightarrow \quad \frac{13}{11} = 1 + \frac{2}{11}$

$(iii)\quad 11 = \ 2 \cdot 5 + 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}$

$(iv)\quad \ 2 = \ 1 \cdot 2 + 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{1} = 2$

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{11}{13} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{2}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{2}{1}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}} = [2; 1,5,2].$$

Se o processo da divisão euclidiana se repetir infinitamente, teremos a representação de um número irracional.

A afirmação oposta também é verdade, conforme o Teorema 1, cuja demonstração se encontra em OLDS, C. D. Continued Fractions. New York: Random House, 1963.

Teorema 1

Qualquer número racional pode ser expresso como uma fração contínua finita, e qualquer fração contínua finita representa um número racional.

Isso nos permite tirar conclusões sobre a representação de um número real por meio de frações contínuas. Se o número for racional, pode ser escrito como uma fração contínua finita. Nesse caso, poderíamos realizar o processo inverso.

Exemplo 6

$$7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}=7+\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}=7+\cfrac{1}{\frac{5}{3}}=7+\frac{3}{5}=\frac{38}{5}$$

Daí, temos que $\frac{38}{5}$ e $[7;1,1,2]$ são duas maneiras distintas de representação do mesmo número.

2.3 Frações reduzidas

Se no desenvolvimento de uma fração contínua, interrompermos o processo em algum ponto e eliminarmos a parte subsequente desse desenvolvimento, o número que obtido até esse momento do processo será chamado de reduzida ou convergente da fração.

Definição 3

Seja $k = [q_0\,; q_1\,, q_2\,, \ldots, q_n\,]$ e sejam $a_n \in \mathbb{Z}$ e $b_n \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, de forma que

$$\frac{a_n}{b_n} = [q_0\,; q_1\,, q_2\; \ldots, q_n\,], n \geq 0. \tag{2.1}$$

A fração $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ é denominada de convergente ou n-ésima reduzida da fração contínua do número real k.

Seja a fração

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n].$$

A primeira reduzida é composta pela parte inteira da fração contínua, e é expressa do seguinte modo:

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{q_0}{1}$$

Cada reduzida ou convergente pode ser representada da seguinte forma:

- primeira reduzida: $[q_0]$:
- segunda reduzida:$[q_0; q_1]$
- terceira reduzida:$[q_0; q_1, q_2]$

  ⋮

- n-ésima reduzida: $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}]$, representa o próprio valor da fração.

Exemplo 7

Em $\frac{82}{39} = [2; 9{,}1{,}3]$, temos

Primeira reduzida: $\frac{a_0}{b_0} = \frac{2}{1} = [2]$

Segunda reduzida: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{19}{9} = [2; 9]$

Terceira reduzida: $\frac{a_2}{b_2} = \frac{21}{10} = [2; 9{,}1]$

Quarta reduzida: $\frac{a_3}{b_3} = \frac{82}{39} = [2; 9{,}1{,}3]$

2.4 Determinação da n-ésima reduzida

Considerando a fração contínua

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \, ,$$

para determinar a sua n-ésima reduzida, é preciso realizar o processo inverso que gera uma fração contínua.

Vejamos:

(i) $\dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{q_0}{1}$

(ii) $\dfrac{a_1}{b_1} = q_0 + \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{q_0 \cdot q_1 + 1}{q_1}$

(iii) $\dfrac{a_2}{b_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} = q_0 + \cfrac{1}{\cfrac{q_1 \cdot q_2 + 1}{q_2}} = \dfrac{q_0 \cdot q_1 \cdot q_2 + q_0 + q_2}{q_1 \cdot q_2 + 1}$

$= \dfrac{q_2(q_0 \cdot q_1 + 1) + q_0}{q_1 \cdot q_2 + 1}.$

Como $\dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{q_2\overbrace{(q_0 \cdot q_1 + 1)}^{a_1} + q_0}{q_1 \cdot q_2 + 1} = \dfrac{q_2 \cdot a_1 + a_0}{q_2 \cdot b_1 + b_0}$, podemos, por indução matemática, reescrever uma regra geral para a escrita da n-ésima reduzida do seguinte modo:

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{q_{n-1} \cdot a_{n-2} + a_{n-3}}{q_{n-1} \cdot b_{n-2} + b_{n-3}}.$$

Proposição 2

Seja a sequência (finita ou infinita) $q_0, q_1, q_2, \cdots \in \mathbb{R}$ tal que $q_n > 0$. Para todo $n \geq 0$, definimos as sequências (a_n) e (b_n) pelas recorrências

$$\begin{cases} a_{n+2} = q_{n+2} \cdot a_{n+1} + a_n \\ b_{n+2} = q_{n+2} \cdot b_{n+1} + b_n \end{cases}, \text{ onde } \begin{cases} a_0 = q_0, \; a_1 = q_0 \cdot q_1 + 1 \\ b_0 = 1, \; b_1 = q_1 \end{cases}. \qquad (2.2)$$

Então,

$$\frac{a_n}{b_n} = \left[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n\right], \text{ para todo } n \geq 0. \qquad (2.3)$$

Demonstração

Prova por indução sobre n.

Suponha que a igualdade $\frac{a_n}{b_n} = \frac{q_n \cdot a_{n-1} + a_{n-2}}{q_n \cdot b_{n-1} + b_{n-2}}$ seja válida para um determinado n.

Para $n+1$, temos:

$$[q_0; q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}] = \left[q_0; q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, \left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right)\right]$$

$$= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots\, q_{n-1} + \cfrac{1}{\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right)}}}} = \frac{\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) a_{n-1} + a_{n-2}}{\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) b_{n-1} + b_{n-2}}$$

$$= \frac{q_{n+1}q_n a_{n-1} + q_{n+1}a_{n-2} + a_{n-1}}{q_{n+1}q_n b_{n-1} + q_{n+1}b_{n-2} + b_{n-1}} = \frac{q_{n+1}\overbrace{(q_n a_{n-1} + a_{n-2})}^{a_n} + a_{n-1}}{q_{n+1}\underbrace{(q_n b_{n-1} + b_{n-2})}_{b_n} + b_{n-1}}$$

$$= \frac{q_{n+1}a_n + a_{n-1}}{q_{n+1}b_n + b_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \quad ;\text{onde } \begin{cases} a_{n+1} = q_{n+1}a_n + a_{n-1} \\ b_{n+1} = q_{n+1}b_n + b_{n-1} \end{cases}.$$

Exemplo 8

Determinemos a sequência das reduzidas do número $\frac{37}{13}$.

Dada a expansão do número $\frac{37}{13}$, por frações contínuas simples, aplicando as fórmulas de recorrência podemos determinar os valores dos a_n's e dos b_n's, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1 – Quocientes parciais e reduzidas do racional $\frac{37}{13}$

n	-2	-1	0	1	2	3
q_n	/	/	2	1	5	2
a_n	0	1	2 · 1 + 0 = 2	1 · 2 + 1 = 3	5 · 3 + 2 = 17	2 · 17 + 3 = 37
b_n	1	0	2 · 0 + 1 = 1	1 · 1 + 0 = 1	5 · 1 + 1 = 6	2 · 6 + 1 = 13
$\frac{a_n}{b_n}$	/	/	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{37}{13}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segue que $\frac{a_0}{b_0} = \frac{2}{1}$, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{1}$, $\frac{a_2}{b_2} = \frac{17}{6}$ e $\frac{a_3}{b_3} = \frac{37}{13}$ é a sequência das reduzidas.

Proposição 3

As sequências (a_n) e (b_n) definidas por (2.2) satisfazem a igualdade a seguir, que é denominada *identidade fundamental.*

$$a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1} = (-1)^n,\ n \geq 0. \tag{2.4}$$

Demonstração

Considerando as condições abaixo, faremos prova por indução sobre n.

$$\begin{cases} a_0 = q_0, & a_1 = q_0 \cdot q_1 + 1 \\ b_0 = 1, & b_1 = q_1 \end{cases}$$

Para $n = 0$,

$$a_1b_0 - a_0b_1 = (q_0 \cdot q_1 + 1) \cdot 1 - q_0 \cdot q_1 = 1 = (-1)^0.$$

Isso mostra que a igualdade é verdadeira para $n = 0$.

Suponhamos, agora, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a igualdade seja válida. Ou seja, vale (2.4).

Provemos, então, que (2.4) vale para $n + 1$. De fato:

$$\begin{aligned} & a_{n+2}b_{n+1} - a_{n+1}b_{n+2} = \\ & = (q_{n+2}a_{n+1} + a_n)b_{n+1} - a_{n+1}(q_{n+2}b_{n+1} + b_n) \\ & = q_{n+2}a_{n+1}b_{n+1} + a_nb_{n+1} - q_{n+2}a_{n+1}b_{n+1} - b_na_{n+1} \\ & = a_nb_{n+1} - b_na_{n+1} \end{aligned}$$

$= (-1)a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}$

$= (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}.$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, a igualdade é válida.

Exemplo 9

Consideremos as informações da Tabela 1 em que apresentamos os quocientes parciais e reduzidas do racional $\frac{37}{13}$, mostremos que os $a_n's$ e os $b_n's$ de duas reduzidas consecutivas satisfazem a *identidade fundamental* (2.4).

Para n = 0 : $a_1b_0 - a_0b_1 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 = (-1)^0$;

Para n = 1 : $a_2b_1 - a_1b_2 = 17 \cdot 1 - 3 \cdot 6 = -1 = (-1)^1$;

Para n = 2 : $a_3b_2 - a_2b_3 = 37 \cdot 6 - 17 \cdot 13 = 1 = (-1)^2$;

Para n = 3 : $a_4b_3 - a_3b_4 = 17 \cdot 13 - 37 \cdot 6 = -1 = (-1)^3$;

Os valores numéricos ilustram a validade da identidade fundamental.

2.5 Propriedades das reduzidas

Propriedade 1

Diferença entre duas reduzidas adjacentes:

$$\Delta_n = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{b_nb_{n+1}}.$$

Demonstração

Pelas expressões definidas em 2.3, temos que

$$\Delta_n = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}}{b_nb_{n+1}}.$$

Digamos que $x_n = a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}$.

Utilizando o fato de $a_n = a_{n-1}q_n + a_{n-2}$ e $b_n = b_{n-1}q_n + b_{n-2}$ temos que:

(i) $a_{n+1} = a_nq_{n+1} + a_{n-1}$

(ii) $b_{n+1} = b_nq_{n+1} + b_{n-1}$

Substituindo (*i*) e (*ii*) em x_n temos,

$$x_n = (a_nq_{n+1} + a_{n-1})b_n - a_n(b_nq_{n+1} + b_{n-1})$$

$$= b_na_nq_{n+1} + b_na_{n-1} - a_nb_nq_{n+1} - a_nb_{n-1}$$

$$= b_n a_{n-1} - a_n b_{n-1}$$

$$= -(a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \ \ (iii)$$

Observe que a expressão (iii) é a mesma que x_n, embora com todos os índices diminuídos apenas uma unidade.

Assim, concluímos que,

$$x_n = -x_{n-1}.$$

Observe que, ao utilizarmos várias vezes esse resultado, podemos chegar até o índice zero.

Vejamos:

$$x_n = -x_{n-1} = x_{n-2} = -x_{n-3} = \cdots = (-1)^n x_0.$$

Calculando x_0 ,temos

$$x_0 = a_1 b_0 - a_0 b_1 = (q_0 \cdot q_1 + 1) \cdot 1 - q_0 \cdot q_1 = 1.$$

Calculando x_1 ,temos

$$x_1 = a_2 b_1 - a_1 b_2 = (q_2 \cdot a_1 + a_0) q_1 - (q_0 \cdot q_1 + 1)(q_2 \cdot b_1 + b_0) = -1.$$

$$= (q_2 \cdot (q_0 \cdot q_1 + 1) + q_0) q_1 - (q_0 \cdot q_1 + 1)(q_2 \cdot q_1 + 1) = -1$$

$$= q_1(q_0 q_1 q_2 + q_2 + q_0) - (q_0 q_1 q_2 q_1 + q_0 q_1 + q_2 q_1 + 1) = -1$$

$$= q_0 q_1 q_2 q_1 + q_2 q_1 + q_0 q_1 - q_0 q_1 q_2 q_1 - q_2 q_1 - q_0 q_1 - 1 = -1 = (-1)^1$$

Calculando x_2 ,temos

$$x_2 = a_3 b_2 - a_2 b_3 = 1 = (-1)^2.$$

Generalizando,

$$x_n = a_{n+1} b_n - a_n b_{n+1} = (-1)^n.$$

Concluímos que

$$\Delta_n = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{b_n b_{n+1}}. \qquad (2.5)$$

Propriedade 2

Cada fração reduzida com número de ordem par é maior que as frações adjacentes, ou seja, a fração imediatamente anterior e a fração imediatamente posterior. Por outro lado, cada reduzida com um número de ordem ímpar é menor que as frações adjacentes.

Demonstração

Consideremos uma reduzida de ordem n:

$$R_n = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$$

Utilizando (2.5) para $n = 2k$ e $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$ temos,

(i) $\Delta_{2k} = \frac{a_{2k-1}}{b_{2k-1}} - \frac{a_{2k}}{b_{2k}} = \frac{(-1)^{2k}}{b_{2k}b_{2k+1}} > 0$

(ii) $\Delta_{2k+1} = \frac{a_{2k+2}}{b_{2k+2}} - \frac{a_{2k+1}}{b_{2k+1}} = \frac{(-1)^{2k+1}}{b_{2k+1}b_{2k+2}} < 0$

Exemplo 10

Verificando que $R_4 > R_3$ e que $R_4 > R_5$.

Ou seja: $\frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2}{b_2} > 0$ e $\frac{a_4}{b_4} - \frac{a_3}{b_3} < 0$

Para fazer a verificação, iremos utilizar a fórmula (2.5),

$$\Delta_n = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{b_n b_{n+1}} .$$

Para $n = 2$, temos:

$$\Delta_2 = \frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{(-1)^2}{b_2 b_3} = \frac{1}{b_2 b_3} > 0$$

Para $n = 3$, temos:

$$\Delta_3 = \frac{a_4}{b_4} - \frac{a_3}{b_3} = \frac{(-1)^3}{b_3 b_4} = \frac{-1}{b_3 b_4} < 0$$

Propriedade 3

Quando se trata do número de ordem, a diferença entre duas frações adjacentes é decrescente em valor absoluto.

Demonstração

Podemos fazer a verificação utilizando diretamente a fórmula (2.5).

$$\Delta_n = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{b_n b_{n+1}} .$$

Vejamos:

$|\Delta_n| = \dfrac{1}{b_n b_{n+1}}$ e $|\Delta_{n+1}| = \dfrac{1}{b_{n+1} b_{n+2}}$.

Como $b_{n+1} > b_n$, temos que $|\Delta_{n+1}| < |\Delta_n|$.

Propriedade 4

Toda reduzida é irredutível.

Demonstração

Digamos que a fração $\frac{a_n}{b_n}$ seja redutível, isso significa dizer que o numerador e o denominador desta fração apresentam um fator comum diferente de um, ou seja,

$a_n = \delta a'_n$ e $b_n = \delta b'_n$; onde $\delta b'_n \in \mathbb{N}$.

Assim, utilizando a igualdade $a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1} = (-1)^n$, obtemos,

$$\delta(a_{n+1}b'_n - a'_n b_{n+1}) = (-1)^n.$$

O que é um absurdo, uma vez que o primeiro membro da igualdade é divisível por δ, enquanto o segundo membro não é.

2.6 Frações contínuas periódicas

Uma fração contínua periódica é aquela em que os quocientes incompletos se repetem continuamente na mesma ordem. O conjunto desses quocientes incompletos que se repetem é chamado de período. Quando o período começa no primeiro quociente incompleto, a fração contínua é denominada periódica simples. Quando o período não começa no primeiro quociente incompleto, a fração contínua é chamada de periódica mista ou composta. Os quocientes incompletos que não se repetem, ou seja, que aparecem antes do primeiro período, constituem a parte não periódica. As frações contínuas periódicas geralmente são representadas escrevendo os quocientes da parte não periódica, seguidos pelos quocientes do primeiro período. Esses quocientes consecutivos são separados por vírgulas, e o período é indicado colocando um ponto sobre cada quociente do período, ou apenas sobre o primeiro e o último quociente.

Essa representação pode ser colocada entre dois traços paralelos ou dentro de parênteses, mas isso não é obrigatório.

Exemplo 11

A fração contínua periódica

$$3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3+\cdots}}}}}}}}}$$

pode ser expressa com os símbolos: $\dot{3},\dot{5},\dot{9}$

$$\dot{3},5,\dot{9}$$

$$(\dot{3},5,\dot{9})$$

$$|\dot{3},5,\dot{9}|.$$

Exemplo 12

A fração contínua mista ou composta

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}}}}}}}$$

pode ser expressa com os símbolos: $2,\dot{4},\dot{7},\dot{6}$

$$2,\dot{4},7,\dot{6}$$

$$(2,\dot{4},7,\dot{6})$$

$$|2,\dot{4},7,\dot{6}|.$$

2.7 Frações contínuas e determinantes

Quando uma fórmula de recorrência é apresentada, como na proposição 2, surge um problema importante: determinar a n-ésima reduzida sem depender das reduzidas anteriores. Nesta seção, mostraremos brevemente que, ao resolver essa problemática, existe uma relação entre frações contínuas e determinantes. A principal conclusão que aborda essa relação, a proposição 3 (*identidade fundamental*), é comprovada pela teoria dos determinantes.

Teorema 4 (*Fórmula do Determinante*).

A relação

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{bmatrix} = a_{n+1}\, b_n - b_{n+1}\, a_n = (-1)^n$$

é verdadeira para todo $n \geq 0$, sendo a_n e b_n o numerador e o denominador, respectivamente, da n-ésima reduzida.

Demonstração

Omitiremos a demonstração dos cálculos das reduzidas mediante aplicação da ideia de determinante, a qual pode ser obtida em BONFIM (2014), MOORE (1964) e OLDS, C. D. (1963).

Assim, dada a fração contínua simples

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n] \text{ ,}$$

cada uma das suas reduzidas pode ser expressa usando-se a noção de determinante.

Por exemplo, as reduzidas $\frac{a_0}{b_0}$ e $\frac{a_1}{b_1}$ podem ser expressas como

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{q_0}{1} = |q_0|$$

$$\frac{a_1}{b_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 \cdot q_1 + 1}{q_1} = \frac{\begin{vmatrix} q_0 & -1 \\ 1 & q_1 \end{vmatrix}}{q_1} .$$

A reduzida $\frac{a_2}{b_2}$ pode ser reescrita como

$$\frac{a_2}{b_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = q_0 + \frac{1}{\frac{q_1 \cdot q_2 + 1}{q_2}} = \frac{q_0 \cdot q_1 \cdot q_2 + q_0 + q_2}{q_1 \cdot q_2 + 1} = \frac{\begin{vmatrix} q_0 & -1 & 0 \\ 1 & q_1 & -1 \\ 0 & 1 & q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & -1 \\ 1 & q_2 \end{vmatrix}}.$$

Pela Proposição 2, temos que os numeradores e os denominadores de uma reduzida são obtidos de forma recorrente, ou seja, usando a representação do número em frações contínuas para obtermos os numeradores e denominadores das reduzidas subsequentes.

Nesse sentido, se aplicarmos a ideia de determinantes à (n+1)-ésima reduzida, $\frac{a_n}{b_n}$, esta seria da forma

$$R_{n+1} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{q_n \cdot a_{n-1} + a_{n-2}}{q_n \cdot b_{n-1} + b_{n-2}} = \frac{\begin{vmatrix} q_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & q_1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & q_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & q_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & q_n \end{vmatrix}}. \qquad (2.6)$$

Exemplo 13

Usando determinantes (sem usar as reduzidas precedentes), obter a terceira reduzida da fração contínua correspondente ao número $\frac{355}{103}$.

Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$355 = 3 \cdot 103 + 46$$
$$103 = 2 \cdot 46 + 11$$
$$46 = 4 \cdot 11 + 2$$
$$11 = 5 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 2 \cdot 1 + 0\,.$$

Assim,

$$\frac{355}{103} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}} = [3; 2,4,5,2] = [q_0; q_1, q_2, q_3, q_4] \, .$$

Adaptando a expressão (2.6) para $n = 4$, obtemos:

$$R_4 = \frac{a_3}{b_3} = \frac{\begin{vmatrix} q_0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & q_1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & q_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & -1 & 0 \\ 1 & q_2 & -1 \\ 0 & 1 & q_3 \end{vmatrix}} .$$

Substuindo $q_0 = 3,\ q_1 = 2,\ q_2 = 4, q_3 = 5$ e $q_4 = 2$, temos

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}} .$$

Para o cálculo específico do determinante de uma matriz quadrada M de ordem $n \geq 4$, podemos usar o método de Laplace, da seguinte maneira:

Selecionamos, de forma conveniente, uma linha i ou coluna j de M, de modo que

$$\det(M) = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det\left(M_{ij}\right) ,$$

onde m_{ij} é o elemento que está na linha i /coluna j da matriz original e M_{ij} é a matriz obtida quando se retira a linha i e a coluna j da matriz original.

Assim, escolhida a coluna 1, chegamos a

$$a_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \det(M_{11}) + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det(M_{21})$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 47 + 1 \cdot 21 = 162.$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 47.$$

Portanto, $\frac{a_3}{b_3} = \frac{162}{47}$.

2.8 Frações contínuas e Equações Diofantinas

Equação Diofantina é uma equação polinomial com coeficientes inteiros que permite a duas ou mais variáveis assumirem apenas valores inteiros. Esta, por sua vez, será linear quando for uma equação entre duas somas de monômios de grau zero ou um.

Problemas Diofantinos possuem menos equações que variáveis desconhecidas e sua resolução se resume a determinar inteiros que sejam, simultâneamente, solução de todas as equações. Numa linguagem um pouco mais técnica, elas definem uma curva ou uma superfície algébrica.

A palavra Diofantina se refere ao matemático helenístico do século III, Diofanto de Alexandria, já citado anteriormente, o qual estudou tais equações e foi um dos primeiros matemáticos a introduzir o uso de símbolos na álgebra. A formulação de teorias gerais para as equações Diofantinas (além da teoria da forma quadrática) foram realizadas apenas no século XX.

Equações diofantinas lineares assumem a forma $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$. Esse tipo de equações resolve muitos problemas na Aritmética. Os teoremas a seguir nos descrevem condições e possíveis soluções para essas equações.

Proposição 5

A equação diofantina $mx + ny = c$, com $m, n, c \in \mathbb{Z}$, admite solução se, e somente se, o $mdc(m, n)$ divide c.

Caso contrário, a equação diofantina $mx + ny = c$ não possui solução.

Demonstração

Seja (x_0, y_0) uma solução particular da equação $mx + my = c$.

Como o $mdc(m,n)$ divide m e divide n, ele também divide $mx_0 + ny_0$, e como (x_0, y_0) é uma solução então $mx_0 + ny_0 = c$ e $mdc(m,n)$ divide c.

Do mesmo modo, supondo que o $mdc(m,n)$ divida c, concluímos que $c = mdc(m,n) \cdot k$, para algum inteiro k.

Por outro lado, pelo Teorema de Bézout, sabemos que existem inteiros a e b, tais que

$$mdc(m,n) = ma + nb. \tag{2.7}$$

Multiplicando (2.7) por k, teremos:

$$mdc(m,n) \cdot k = (ma + nb) \cdot k \quad \therefore \quad c = m(ak) + n(bk).$$

Logo, existe pelo menos uma solução da equação que é (ak, bk).

Exemplo 14

A equação diofantina $4x + 6y = 9$ não possui solução pois $mdc(4, 6) = 2$, não divide 9.

Teorema 6

Se m, n são inteiros positivos, tais que $mdc(m,n) = 1$, então possui infinitas soluções inteiras a equação

$$mx - ny = 1. \tag{2.8}$$

Demonstração

Pelo Teorema 1, é possível expressar o número racional $\frac{m}{n}$ por meio de uma fração contínua simples e finita

$$\frac{m}{n} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]. \tag{2.9}$$

As duas últimas reduzidas $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ e $\frac{a_n}{b_n}$ formam o meio adequado para a solução da equação $mx - ny = 1$, pois elas satisfazem as relações da Proposição 3, ou seja,

$$a_n \cdot b_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_n = (-1)^n,$$

substituindo, $a_n = m$ e $b_n = n$, temos

$$m \cdot b_{n-1} - n \cdot a_{n-1} = (-1)^n. \qquad (2.10)$$

Se a quantidade de quocientes, r, é par, segue que $x_0 = b_{r-1}$ e $y_0 = a_{r-1}$ é uma solução particular $mx - ny = 1$. Entretanto, se r é ímpar, temos que $(-1)^r = -1$.

Ao obtermos a solução particular (x_0, y_0) da equação $mx - ny = 1$, podemos facilmente encontrar a sua solução geral.

Para que isso ocorra, consideremos (x, y) outra solução da equação (2.8).

Assim,

$$mx - ny = m \cdot x_0 - n \cdot y_0 = 1. \qquad (2.11)$$

Daí obtemos seguinte igualdade:

$$m(x - x_0) = n(y - y_0).$$

Como o $mdc(m, n) = 1$, segue que n divide $x - x_0$. Logo, existe um inteiro k tal que

$$x - x_0 = nk \text{ se e somente se } x = x_0 + nk. \qquad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.10), temos

$$n(mk) = n(y - y_0).$$

Logo,

$$(y - y_0) = mk \text{ se e somente se } y = y_0 + mk\,. \qquad (2.13)$$

Portanto, toda solução (x, y) da equação $mx - ny = 1$ é da forma

$$\begin{cases} x = x_0 + nk \\ y = y_0 + mk \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (2.14)$$

Em contrapartida, se (x_0, y_0) é uma solução particular de $mx - ny = 1$, as relações apresentadas em (2.13) satisfazem a equação dada.

De fato,

$$\begin{aligned} mx - ny &= m(x_0 + nk) - n(y_0 + mk) \\ &= mx_0 + mnk - ny_0 - mnk \qquad (2.15) \\ &= mx_0 - ny_0 + mnk - mnk \\ &= mx_0 - ny_0 = 1 \end{aligned}$$

Portanto, as soluções dadas, conforme (2.13), são denominadas de solução geral da equação $mx - ny = 1$.

Exemplo 15

Obteremos as soluções gerais das equações $13x - 29y = 1$ e $13x - 29y = -1$.

Usando o algoritmo de Euclides, temos

$$29 = 2 \cdot 13 + 3$$
$$13 = 4 \cdot 3 + 1$$
$$3 = 3 \cdot 1 + 0\,.$$

Com isso, $\frac{13}{29} = [0; 2,4,3]$.

Vamos calcular a reduzida $\frac{a_2}{b_2}$, a qual satisfaz

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{\begin{vmatrix} q_0 & -1 & 0 \\ 1 & q_1 & -1 \\ 0 & 1 & q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & -1 \\ 1 & q_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4}{9}.$$

Segue que $(x_0, y_0) = (9,4)$ é uma solução particular da equação $13x - 29y = 1$, pois $13(9) - 29(4) = 1$.

Portanto, de acordo com (2.14), sua solução geral é dada por

$$\begin{cases} x = 9 + 29k \\ y = 4 + 13k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Multiplicando a solução $(9,4)$ por (-1), e substituindo na equação $13x - 29y = 1$, obtemos $13(-9) - 29(-4) = -1$.

Logo, $(x_1, y_1) = (-9, -4)$ é uma solução particular da equação $13x - 29y = -1$, que tem como solução geral

$$\begin{cases} x = -9 + 29k \\ y = -4 + 13k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Visto como encontrar as soluções da equação $mx - ny = 1$, vamos determinar as soluções das equações $mx - ny = c$ e $mx + ny = c$, em que $mdc(m, n) = 1$. Tais soluções surgem sem complicações, conforme indicado a seguir.

(i) Consideremos a equação $mx - ny = c$, onde $mdc(m, n) = 1$.

Por (2.14), temos a solução particular (x_0, y_0) de $mx - ny = 1$, da forma

$$mx_0 - ny_0 = 1,$$

multiplicando a equação por c, temos

$$c(mx_0 - ny_0) = c$$

$$cmx_0 - cny_0 = c$$

$$m(cx_0) - n(cy_0) = c. \qquad (2.16)$$

Portanto, (cx_0, cy_0) é uma solução particular de $mx - ny = c$ e sua solução geral é dada por

$$\begin{cases} x = cx_0 + nk \\ y = cy_0 + mk \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (2.17)$$

(ii) Consideremos a equação $mx + ny = c$, onde $mdc(m, n) = 1$.

Usando (2.10), iremos encontrar a solução particular de $mx + ny = 1$ com as reduzidas $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ e $\frac{a_n}{b_n}$, que satisfazem

$$m \cdot b_{n-1} - n \cdot a_{n-1} = m \cdot b_{n-1} + n \cdot (-a_{n-1}) = 1. \qquad (2.18)$$

Assim, $x_0 = b_{n-1}$ e $y_0 = -(a_{n-1})$ é uma solução particular de $mx + ny = 1$.

Notamos que

$mx + ny = c \cdot 1 = c[m \cdot b_{n-1} + n \cdot (-a_{n-1})]$,ou seja,

$m(x - c \cdot b_{n-1}) = n(-y - c \cdot a_{n-1}).$ (2.19)

Como $mdc(m, n) = 1$, segue que n divide $(x - c \cdot b_{n-1})$. Logo, existe um número inteiro k, tal que

$x - c \cdot b_{n-1} = nk$ se e somente se $x = c \cdot b_{n-1} + nk.$ (2.20)

De (2.20) em (2.19), temos $n(mk) = n(-y - c \cdot a_{n-1})$.

Assim,

$-y - c \cdot a_{n-1} = mk \Leftrightarrow y = c \cdot (-a_{n-1}) - mk.$ (2.21)

Por outro lado, para qualquer número $k \in \mathbb{Z}$, uma substituição direta utilizando (2.18), (2.20) e (2.21), nos fornece

$$\begin{aligned} mx + ny &= m(c \cdot b_{n-1} + nk) + n(c \cdot (-a_{n-1}) - mk) \\ &= m \cdot c \cdot b_{n-1} + mnk - mnk + n \cdot c \cdot (-a_{n-1}) \\ &= c[m \cdot b_{n-1} + n \cdot (-a_{n-1})] = c \cdot 1 = c. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação $mx + ny = c$ é da forma

$$\begin{cases} x = c \cdot b_{n-1} + nk \\ y = c \cdot (-a_{n-1}) - mk \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c \cdot b_{n-1} + nk \\ y = c \cdot (-a_{n-1}) - mk \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 16

Obteremos as soluções gerais das equação $30x - 13y = 5$.

Usando o algoritmo de Euclides, temos

$$30 = 2 \cdot 13 + 4$$

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0$$

Assim, $\frac{30}{13} = [2; 3,4]$, que um número ímpar de quocientes; ou seja, devemos transformá-la em outra equivalente com número par de quocientes.

$$\frac{30}{13} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}.$$

Vamos então determinar a terceira reduzida para encontrar uma solução particular de $30x - 13y = 5$.

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{23}{10}$$

Segue que $x_0 = b_2 = 10$ e $y_0 = a_2 = 23$ são soluções da equação $30x - 13y = 1$. Com isso, obtemos $30(10) - 13(23) = 1$. Logo, $(5x_0, 5y_0) = (50\,, 115)$ é uma solução particular da equação $30x - 13y = 5$.

Portanto, sua solução geral é

$$\begin{cases} x = 50 + 13k \\ y = 115 + 30k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente, $(-50x_0, -115y_0) = (-50\,, -115)$ é uma solução particular da equação $30x - 13y = -5$. Consequentemente, sua solução geral é

$$\begin{cases} x = -50 + 13k \\ y = -115 + 30k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O resgate da longa história das frações contínuas reforça o seu uso já nos tempos antigos. Em nosso trabalho, conseguimos perceber que elas continuam sendo um tópico de pesquisa matemática ativa, que desempenha um papel importante no desenvolvimento de diversas áreas, incluindo teoria dos números, análise matemática e até mesmo na tecnologia, com a criptografia moderna.

As frações contínuas não se resumem apenas a uma forma de representar números racionais e irracionais, mas, muito além disso, constituem uma teoria capaz de determinar melhores aproximações racionais de um número irracional, para que sejam utilizadas em pesquisas matemáticas de grande valor.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, observamos que as frações contínuas são predominantemente abordadas em dissertações de mestrado, o que nos colocou em um cenário desafiador, devido à dificuldade na compreensão da linguagem técnica e complexidade dos conceitos encontrados na adaptação para um trabalho de graduação. Cada desafio vencido contribuiu ainda mais para nossa interpretação do tema proposto.

A construção do TCC se consolidou numa rotina intensa, desde a escolha do tema até a sua exposição. Superamos grandes dificuldades, transformando-as em incentivo para persistir rumo a esta conquista. É recompesador ver o trabalho tomando forma, cada capítulo sendo revisado e concluído aos poucos, fortalecendo nossa autoconfiança. Para nós, o trabalho não só atendeu as expectativas, mas representou todo nosso aprendizado e dedicação ao longo deste curso.

Por fim, podemos dizer que os objetivos a que nos propusemos neste trabalho foram atingidos, uma vez que conseguimos entender e expor as principais definições e resultados concernentes ao tema, bem como a relação existente entre as frações contínuas, determinantes e equações diofantinas lineares. Estes estudos, com certeza, poderão nos ser útil para novas pesquisas.

4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BIANCHINI, Barbara Lulaif, LIMA, Gabriel Loureiro de, GOMES, Eloiza. A Formação de Professor: reflexões da educação matemática no ensino superior. Revista Educação & Realidade, v.44 n.1 , 2019.
- BONFIM, D. D. Frações contínuas com aplicações (dissertação). Universidade Federal do Tocantins. Mestrado Profissional em Matemática, 2014.
- BONFIM, Delfim Dias, NOVAES, Gilmar Pires. Frações Contínuas, Determinantes e Equações Diofantinas Lineares. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas – UFSM, 2014.
- COURANT, Richard, ROBBINS, Herbert. O que é a Matemática?. Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.
- COUTO, Aline Grassi. Frações Contínuas e Números Reais (dissertação). Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal da Grande Dourados, 2017.
- DUTRA, Anderson Zacher. Frações contínuas: Uma leitura atualizada (dissertação). Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal do Paraná, 2019.
- FARIA, Paulo Cesar de. A formação do professor de matemática: problemas e perspectivas (dissertação). Mestrado em Educação. Universidade Federal do Paraná, 1996.
- MOORE, C. G. An introduction to continued fractions. The National Council of Teachers of Mathematics,1964.
- OLDS, C. D. Continued fractions. Handom House The L. W. Singer Company, 1963.
- RODRIGUES, Mírian Ferminiano, MACIEL, Maria de Lourdes. O Currículo de Matemática da Educação Básica: Uma Perspectiva da Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS). Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 05, Ed. 08, Vol. 06, p. 80-96, 2020.
- SANDES, Joana Pereira, MOREIRA, Geraldo Eustáquio – 2018. Educação Matemática e a Formação de Professores para uma Prática Docente Significativa. Revista @mbienteeducação. São Paulo: Universidade Cidade de São Paulo, v. 11, n. 1, p. 99-109, 2018.
- SANTOS, Antonio Carlos Damasceno dos. Um resgate às frações contínuas (dissertação). Mestrado em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Ceará, 2014.