COMO OS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO SECUNDÁRIO UTILIZAM O NAG?

Alain Bronner[1]
Luiz Márcio Santos Farias[2]

RESUMO: *Este trabalho discute o problema da utilização das interrelações entre os domínios matemáticos a partir do processos de transposição didática e de resolução de exercícios no ensino de Matemática secundário. Nesta pesquisa os domínios matemáticos são restritos ao numérico-algébrico e ao geométrico. Consideramos estas intererrelações à partir da utilização das mesmas nas práticas dos professores e dos alunos do ensino secundário. A utilização das interrelações entre os domínios numérico-algébrico e geométrico requer uma ecologia específica ainda pouco estudada e fortemente limitada por condições transpositivas que emanam dos diferentes níveis de co-determinação didática Bronner (1997; 2007). Apesar deste estudo constituir uma pesquisa de proporções maiores, nesta comunicação nos limitaremos ao desenvolvimento das bases teóricas e apresentaremoselementos de uma análise, a partir de uma aula de Matemática realizada em uma classe equivalente à 1ª série do ensino médio, da maneira que um professor instala e utiliza as interrelações entre os domínios numérico-algébrico e geométrico.*

Palavras-Chave: Didática da Matemática; Domínios matemáticos; Reciprocidade; Teoria antropológica da didática.

INTRODUÇÃO

Os trabalhos desenvolvidos pelos professores e alunos no ***ensino secundário de Matemática*** (**EMS**), inscrevem-se em diferentes domínios. Investigações em *Didática da Matemática* já sinalizaram a possibilidade e a importância, para o processo de ensino-aprendizagem, de fazer as "idas e vindas" entre os diferentes domínios matemáticos. Em contrapartida, o estudo das ***interrelações entre os domínios numérico-algébrico e geométrico*** (**NAG**) - como objeto matemático ou instrumento didático - e suas implicações no processo ensino-aprendizagem de Matemática permanece pouco desenvolvido em Didática da Matemática e constitui o objetivo da nossa investigação.

As nossas motivações devem-se de uma parte aos debates no contexto da Educação Nacional no Brasil, e em outros países, que apontam a necessidade de se ajustar o trabalho escolar à uma nova realidade, marcada pela crescente presença da Matemática em diversos campos da atividade humana, Farias (2007). Estes debates influenciaram as revisões dos programas de ensino secundário e universitário no Brasil e em outros países, como por exemplo na França. No que diz respeito ao ensino secundário brasileiro, o novo programa em vigor data de 1998, Parâmètros Curriculares Nacionais (PCNs). No que diz respeito ao ensino da Matemática, os PCNs fornecem designadamente, elementos que colaboram com o debate

---

[1]Orientador, Professor de Matemática da Universidade de Montpellier II. Membro do Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique Education et Formation -LIRDEF» do « Institut Universitaire de Formation des Maîtres – IUFM » Université de Montpellier II. Diretor da Equipe «Etudes et recherches sur l'enseignement des sciences- ERES».
[2] Doutorando em Didática da Matemática CAPES e membro da Equipe «Etudes et recherches sur l'enseignement des sciences- ERES» do Laboratorio «Interdisciplinaire de recherche en didactique education et formation - LIRDEF» da Universidade de Montpellier II. E-mail : luiz.farias@montpellier.iufm.fr

nacional a cerca do processo ensino-aprendizagem de Matemática, bem como, socializa informações e os resultados de investigações no conjunto dos professores brasileiros. O PCN de Matemática visa à construção de um referencial que guie a prática escolar de tal maneira que seja possível à qualquer criança e jovem brasileira ter acesso a um conhecimento matemático que torne realmente possível, a sua inserção, como verdadeiros cidadãos no mundo do trabalho, nas relações sociais e culturais:

> *"A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos." (Brasil. Secretaria de Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília: MEC /SEF, 1998. p.19)*

Por outro lado, nossas motivações devem-se também ao conjunto das nossas experiências profissionais. Através das nossas práticas e discussões ao mesmo tempo com colegas e estudantes, pudemos fazer uma constatação empírica das dificuldades para estabelecer e utilizar as interrelaçõeos existentes entre os domínios numérico-algébricos e geométricos presentes, quer seja nas tentativas de resoluções das tarefas quando se tenta mudar o quadro (sob o ponto de vista de Douady, 1986), quer seja nas possíveis trocas entre diferentes registros de representações (sob o ponto de vista de Duval, 1993). Estes obstáculos atingem, certamente, os estudantes, que apresentam dificuldades para instaurar as interrelações possíveis entre os domínios matemáticos e sobretudo para encontrar meios de controle e validação do que fazem. Os professores, por conseguinte, são frequentemente confrontados às dificuldades e aos bloqueios dos seus estudantes. Neste contexto os professores podem se perguntar : (a) *o que eu posso fazer para ensinar uma tarefa matemática?* (b) *como dirigir o estudo de tal tarefa numa classe?*

Para entender como os professores respondem essas questões, nós nos apoiaremos em algumas teorias da Didática da Matemática francesa. É importante sublinhar que a Didática da Matemática é uma vertente da Educação Matemática, sendo a primeira tão recente quanto a segunda. Sua origem data dos anos 70, na França e ao longo destes anos os progresso nessa área são consideráveis com surgimento de várias teorias Henriques, (2006), entre as quais, podemos citar a Teoria Antropológica da Didática (**TAD**) de Yves Chevallard, a Teoria de Situações Didática (**TSD**) de Guy Brousseau e a Teoria de Campos Conceituais (**TCC)** desenvolvida por Gérard Vergnaud, como algumas das teorias-chaves em Didática da Matemática. Dentre as teorias citadas apresentaremos, em linhas gerais a **TAD** e outros princípios relacionados. Essa escolha justifica-se pela composição dos elementos que apresentaremos neste artigo e na tentativa de obedecer as recomendações previamente estabelecidas pela comissão.

1. TEORIA ANTROPOLÓGICA DA DIDÁTICA (TAD)

Um estudo praxiológico matemático (Chevallard 1999) pode permitir modelizar a resposta de (a), primeira pergunta acima, enquanto que um estudo praxiológico didático (Chevallard 1999) pode permitir modelizar a resposta de (b), segunda pergunta. Chevallard considera que qualquer ação humana pode ser analisada num sistema que ele nomeou praxiologia ou organização praxiológica.

Neste contexto, o papel do professor, tal como podemos observar na classe, pode exprimir-se em termos de tipos de tarefas (**T**) realizadas de maneira específica ou técnica (**τ**).

Trata-se de uma abordagem, desenvolvida por Chevallard (1992), inscrita no prolongamento da teoria da *transposição didática* também de sua autoria. Essa abordagem considera os *objetos* matemáticos, não como existente em si, mas como entidades que emergem de sistemas de práticas que existem em dadas *instituições*.

Segundo Chevallard, a didática de ciências, como todas as didáticas, inscreve-se no campo da antropologia social, ou seja, o campo do estudo do homem. Da mesma maneira que existe uma antropologia religiosa ou uma antropologia política, cujos objetos de estudos são respectivamente a religião ou a política, Chevallard (1992) propõe a elaboração de uma antropologia didática, cujo objeto de estudo seria a didática, com o objetivo de estudar, por exemplo, o professor e o aluno diante de um problema matemático. O princípio dessa abordagem é que "*tudo é objeto*". O autor distingue no entanto os tipos de objetos específicos, a saber: *instituições* (**I**), *pessoas* (**X**) e as posições que ocupam as pessoas nas instituições. Ocupando essas posições, essas pessoas tornam-se *sujeitos* das instituições - sujeitos ativos que contribuem na existência das *instituições*. O *conhecimento - o saber* (**O**), como certa forma de organização– entra então em cena com a noção de *relação* entre os elementos primitivos (*instituição*, *objeto do saber* e *pessoa*) da teoria.

1.1. Relação pessoal e relação institucional

Um objeto **O** do saber existe na medida em que uma pessoa **X** ou uma instituição **I** o reconhece como existente. Assim as relações entre os termos primitivos podem ser esquematizados como na figura abaixo. Chevallard explica como segue:
Um objeto **O** existe para uma pessoa **X** se existe uma relação pessoal, denotada R(**X,O**), da pessoa **X** ao objeto **O**. Isto é, a relação pessoal à **O** determina a maneira em que **X** conhece **O**. De maneira análoga, se define uma relação institucional de **I** à **O** denotada R(**I,O**) que exprime o reconhecimento do objeto **O** pela instituição **I**.
O é assim, um objeto da instituição **I**. Essas relações podem também representar-se da seguinte maneira:

R(X,O)	Relação pessoal de **X** à **O** ⇔ **X** conhece **O**
R(I, O)	Relação pessoal de **I** à **O** ⇔ **I** conhece **O**

Segundo Chevallard,

> "*Todo saber é ligado ao menos a uma instituição, na qual é colocado em jogo, num dado domínio real. O ponto essencial, é portanto, que um saber não existe in vácuo, num vazio social. Todo conhecimento aparece, num dado momento, numa dada sociedade, ancorado numa ou numas instituições*".(Chevallard, 1989).

A relação pessoal de uma pessoa a um objeto de saber só pode ser estabelecida quando a pessoa entra na instituição onde existe esse objeto. Uma *relação institucional* está, por sua vez, diretamente relacionada às atividades institucionais que são solicitadas aos alunos. Ela é, de certa maneira, caraterizada por diferentes tipos de *exercícios* que os alunos devem efetuar e por razões que justificam tais tipos de exercícios. Sendo assim, a *relação institucional* à um objeto (**R(I,O)**) é descrita por um conjunto de práticas sociais que funcionam numa instituição, envolvendo esse objeto do saber. Seguindo na apresentação das bases teóricas da TAD, abordaremos em seguida a vertente praxeológica.

1.2. Praxeologia

De acordo com Chevallard, o *saber matemático*, enquanto forma particular do conhecimento, é fruto da ação humana institucional, e é algo que se produz, se utiliza, se ensina ou, de uma forma geral, que transita nas instituições. Chevallard propôs a noção de *organização praxeológica* ou simplesmente *praxeologia* como conceito-chave para estudar as *práticas institucionais* relativas a um objeto do saber e em particular as práticas sociais em matemática. Ele se propôs a distinguir as *praxeologias* que podem se construir numa sala de aula (onde se estuda esse objeto), à analisar a maneira pela qual pode-se construir o estudo desse objeto, e que podem permitir a descrição e o estudo das condições de realização. A *abordagem praxeológica* é portanto um modelo para análise da ação humana institucional. Com efeito, as *praxeologias* são descritas em termos das quatros noções à seguir:

(Tipo de) tarefa ou Exercícios → T (Tipo de) Técnica→ τ Tecnologia→ θ Teoria → Θ

Essas noções permitem a modelização das práticas sociais em geral e das atividades matemáticas em particular.

(Tipo de) tarefa ou Exercício: É adotado o símbolo ***T*** para representar um ***tipo de exercício*** identificado numa praxeologia, contendo ao menos um exercício ***t***. Essa noção, supõe um objeto relativamente preciso. Por exemplo, *calcular o produto de dois números naturais,* é um tipo de exercício, mas *calcular,* simplismente, é um *gênero* que requer um determinativo. Assim, *exercícios*, *tipo de exercícios*, *gênero de exercícios* não são dados da natureza: são "*artefatos*", "*obras*", "*construtos*" institucionais, cuja reconstrução em determinada instituição é um problema que constitui um dos objetos da didática.

(Tipo de) Técnicas :Uma ***técnica***, denotada por τ, é uma maneira de fazer ou realizar um tipo de exercícios ***T***. Com efeito, uma *praxeologia* relativa a ***T***, necessita de maneiras de realizar os exercícios $t \in T$, isto é, de uma *técnica,* do grego *tekhnê,* que significa saber-fazer. Assim, para um dado tipo de exercícios **T**, existe, em geral, uma única técnica, ou ao menos um conjunto de técnicas reconhecidas institucionalmente (em exceção das possíveis técnicas alternativas que podem existir em outras instituições) e que permitem também realizar $t \in T$.

Tecnologia: A ***tecnologia,*** denotada por θ, é um discurso racional (o *logos*) tendo por objetivo *justificar* a *técnica* τ, garantindo que esta permita realizar os exercícios do tipo ***T***. Uma segunda função da *tecnologia* é a de *explicar*, tornar compreensível a *técnica*. Se a sua primeira função – *justificar a técnica* – consiste em assegurar que a técnica alcançe o objetivo, a segunda função – *explicar* - consiste em expor o porque fazer daquela maneira. É notável que as duas funções *justificação* e *explicação* são assumidas diferentemente por uma dada *tecnologia*.

Teoria: A ***teoria,*** representada por Θ, tem a função de justificar e tornar compreensível uma *tecnologia* θ.

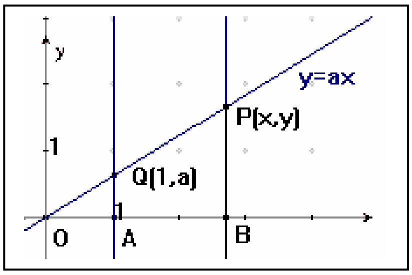
Para esclarecer brevemente o que foi descrito acima, analisaremos o exercício "Construir o gráfico da função linear $f(x) = ax$" sob a luz de uma organização praxeológica.

A **tarefa** **T** : construir o gráfico da função $f(x) = ax$. Poderiamos nos referir às **specimenes** $\mathbf{t_1}$: construir o gráfico da função $f(x) = 2x$, $\mathbf{t_2}$: construir o gráfico da função $f(x) = -x$, Sendo que $\{\mathbf{t_1}; \mathbf{t_2}\} \subset \mathbf{T}$.

A **técnica** τ**:** é a maneira usual de executar a tarefa proposta que, no caso, é formada pelas seguintes etapas: construção de duas retas perpendiculares, estabelecimento de uma escala em cada eixo, localização de dois pontos A e B no plano cartesiano de coordenadas $(x_1, f(x_1))$ *e* $(x_2, f(x_2))$ respectivamente e, finalmente, a construção da reta que passa pelos pontos A e B.

A tecnologia θ: O gráfico de uma função linear $f(x) = ax$ é uma reta que passa pela origem. Demonstração:

I) Caso $a > 0$. É evidente que a origem O = (0, 0) é um ponto do gráfico. Para x = 1, temos $y = a.1 = a$, de forma que o ponto Q = (1, a) também está no gráfico. A condição para que um ponto qualquer P = (x, y), com x ≠ 0, satisfaça a equação $y = ax$ é que $\frac{y}{x} = \frac{a}{1}$. Observando a figura abaixo, isso equivale a dizer que os triângulos OAQ e OBP são semelhantes, ou que o ponto P está na reta OQ.



II) O raciocínio no caso $a < 0$ é o mesmo.

III) Se a = 0, a equação se reduz a y = 0, cujas soluções são os pontos $(x,0)$, isto é, os pontos do eixo Ox, portanto, o gráfico é o eixo Ox.

As teorias Θ de suporte são as seguintes:

Θ_1: Função como correspondência $x \to 2x$.

Θ_2: Uma função *f*: R→ R pode ser representada graficamente do seguinte modo: considera-se num plano α um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY e o conjunto G de todos os pontos de coordenadas $(x, f(x))$, com $x \in$ R. O conjunto G é denominado gráfico da função *f* relativo ao sistema de coordenadas XOY.

Θ_3: As condições de semelhança de dois triângulos.

Θ_4: O teorema da proporcionalidade.

Além disso, pode-se acrescentar a teoria.

Θ_5: A função linear é uma função contínua.

O bloco [tarefa/técnica] é considerado o *saber-fazer*, ao passo que o bloco [tecnologia/teoria] é considerado o *saber*. No exemplo apresentado, *saber* construir o gráfico da função linear é conhecer a praxeologia descrita.

As quatro noções: *tipo de exercício* (**T**), *técnica* (**τ**), *tecnologia* (**θ**) e *teoria* (**Θ**), compõem uma *organização praxeológica* completa [**T/τ/θ/Θ**], decomponível em dois blocos [**T/τ**] e [**θ/Θ**], constituindo respectivamente, o *saber-fazer* [*praxe*] e o ambiente *tecnológico-teórico* [*logos*]. Dessa forma, podemos afirmar que *produzir, ensinar e aprender matemática* são ações humanas que podem descrever-se conforme o modelo *praxeológico.* Nesse sentido, a *organização praxeológica* relativa às atividades matemáticas é uma *organização matemática*[3].

Segundo Matheron,

> *"Essa organização permite estudar uma mesma noção matemática designada por um mesmo nome, mas com organizações matemáticas de naturezas diferentes se desenvolvidas no seio de instituições diferentes. Esse ponto de vista ressalta o aspecto ecológico relativo à um objeto O, quer dizer, o aspecto do questionamento da existência real ou da inexistência desse objeto na instituição onde vive uma dada organização matemática. Essa dimensão ecológica nos permite questionar como é ensinado um objeto identificado num*

[3] Uma *organização matemática*, segundo Chevallard (1999), é apenas uma organização praxéologica de natureza matemática, constituida em torno de um ou vários tipos de tarefas matemáticas, mais ou menos bem identificadas, que evocam a criação de técnicas matemáticas mais ou menos adaptadas assim que justificadas por tecnologias matemáticas mais ou menos sólidas e explícita.

> *livro didático, que tipo de técnica sera utilizada na resolução de determinado exercício e qual é a organização matemática, e por conseqüência, que tipo de programa considerar." (Matheron, p. 52).*

Analisar a vida de um objeto matemático numa *instituição*, compreender sua significação para essa instituição, é identificar a *organização matemática* que coloca esse objeto em jogo. Nesta perspectiva e procuramos estudar a *organização matemática* que é um dos objetos reveladores de praxeologia completa nas instituições de ensino.

A noção de *organização praxeológica e a noção de relação institucional* proporcionam, a partir de um estudo *ecológico dos livros didáticos* e de *programas* de cursos, ferramentas que podem contribuir na modelização das respostas das questões elaboradas por Matheron.

Chevallard considera que o sistema das tarefas dos professores revela duas grandes componentes solidárias: organizações matemáticas - das tarefas de concepção e de organização de dispositivos de estudo, bem como gestão dos seus ambientes; organizações didáticas[4] - das tarefas de ajuda ao estudo e, em especial, de direção de estudo e de ensino cujo cumprimento é chamado pela aplicação de técnicas didáticas determinadas. Bronner (1999) considera que numa instituição dada, a um momento institucional dado, uma tarefa genérica pode ser esclarecida do ponto da vista de certas condições de acordo com o resultado esperado, este contrato uma vez estabelecido determina até as forma dos resultado esperados. A partir deste contexto surgiram as nossas hipóteses de investigação sobre as quais nossos estudos apoiam-se, dentre elas configura a existência de um vazio didático (Bronner 1997, 2007) para o NAG como instrumento e como objeto no EMS. Apesar desse vazio didático, o NAG tem um lugar e um papel importante no ensino-aprendizagem de Matemática atualmente. Este vazio pode constituir um obstáculo para os alunos e também para os professores na resolução de tarefas que recorrem ao NAG e na construção de novos conhecimentos.

2. METODOLOGIA E ANÁLISE

Em respeito às recomendações estabelecidas para esta publicação, nos limitaremos aqui à uma apresentação suscinta da metodologia e análise dos dados coletados ao longo desta pesquisa sobre o estudo das interrelações entre os domínios numérico-algébrico e geométrico.

Do ponto de vista metodológico foram realizados ao longo de um ano escolar observações em uma classe equivalente ao 1° ano do ensino médio brasileiro, em um colégio francês, composta por 32 alunos. Estas observações foram gravadas em audio e todas atividades realizadas pelos alunos foram copiadas(xérox), ambos sofreram uma análise detalhada. O que nos possibilitou a reconstituição da *organização matemática* e da *organização didática* presentes nas aulas.

Visto a amplitude dos estudos realizados ao longo desta pesquisa, no que diz respeito aos resultados apresentados neste artigo, ressaltamos que foram considerados apenas os dados coletados e observados à partir de uma única aula. Nesta aula o professor de Matemática que denominamos P2, faz o seu curso sobre os objetos: "a distância entre dois números" e "o valor absoluto de um número". Em contrapartida, ao analisar o discurso de P2 durante esta aula constatamos que, nem os objetos da aula, o estudo "da distância entre dois números e o valor absoluto de um número", nem as intenções de P2 de introduzir estes dois objetos, são revelados aos alunos no início do curso, eles vão aparecer progressivamente ao longo do mesmo.

---

[4] A *organização didática* , segundo Chevallard (1999), refere-se à reconstrução ou a transposição desta organização matemática na classe.

De maneira geral, a *organização matemática* (OM) construída na classe apresenta três tipos de tarefas em torno dos quais a aula é desenvolvida. O curso sobre "a distância entre dois números e o valor absoluto de um número" começa quando P2 propõe aos alunos um tipo de tarefa que notaremos $\mathbf{T_{carré}}$. Este tipo de tarefa guia o jogo didático do início ao fim da aula. Nesta aula aparecem também dois outros tipo de tarefas que são notados $\mathbf{T_d}$ e $\mathbf{T_V}$, sobre as quais trabalham P2 e os seus alunos.

Tipo de tarefa T	**Técnica** τ
$\mathbf{T_{carré}}$ – Calcular $a^2 - b^2$ sendo dado « a » e « b »	$\tau_{carré1.}$– Com a ajuda da calculadora, calcula-se de uma só vez $a^2 - b^2$.
	$\tau_{carré.2}$ - Sem utilisar a calculadora transforma-se $a^2 - b^2$ em um produto notável (a+b) (a-b). Procura-se $\boldsymbol{\alpha}$ tal que : $\begin{cases} a = \boldsymbol{\alpha} + m \\ b = \boldsymbol{\alpha} - m \end{cases}$ A reta graduada é utilizada para mostrar que $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{(a + b)/2}$ e $m=a-\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}-b$. O número $a^2 - b^2$ é escrito como $(\boldsymbol{\alpha}+m)^2-(\boldsymbol{\alpha}-m)^2= =2\boldsymbol{\alpha}2\mathbf{m}=4\boldsymbol{\alpha}\mathbf{m}=100\boldsymbol{\alpha}$ como valor exato procurado.
$\mathbf{T_d}$ – Calcular d(a ;b).	τ_d – Escrever d(a ;b)=$\lvert a-b \rvert$. Calcula-se o valor absoluto da subtração de 25 por 12 ou de 12 por 25, isto é $\lvert 25-12 \rvert = \lvert 12-25 \rvert$
$\mathbf{T_v}$ – Calcular V(a) com « a » numérico.	τ_{v1} – Escrever V(a) = d(a ;b)= d(a ;0).

Tabela 2 : Os tipos de tarefas

O quadro acima apresenta os tipos de tarefas e as técnicas que acompanham cada uma destas tarefas de maneira simplificada. Neste quadro não especificamos os elementos tecnológicos ou teóricos das praxiologias que aparecem na aula. Porém, os elementos que pertencem ao bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] que permitem justificar as técnicas anteriores serão anunciados, de forma resumida, no decorrer deste artigo. A organização matemática da aula pode ser descrita através das tarefa $\mathbf{T_{carré}}$,$\mathbf{T_d}$ **e** $\mathbf{T_V}$ e de um certo número de sub-tarefas que denominaremos de *espécimes*. A partir desta análise podemos apresentar a organização didática que se constitue na aula.

No que diz respeito a organização didática da aula, o curso deste professor começa por uma fase individual de elaboração - a introdução de uma nova noção, seguida de uma fase de institucionalização de conhecimentos e termina-se por uma fase de exercícios representada no quadro abaixo:

Linhas	**Duração**	**Modalidade de trabalho**	**Fases**	**Tipo de atividade**
De 2 à 22	03 min	Individual	**I**	AER[5]
De 23 à 35	10 min	Coletivo	**II**	AER
De 36 à 66	10 min	Coletivo	**III**	AER
De 67 à 76	05 min	Coletivo	**IV**	AER
De 77 à 120	02 min	Coletivo	**V**	**institucionalização**
De 121 à 322	12 min	Coletivo	**VI**	**institucionalização**
De 323 à 345	04 min	Coletivo	**VII**	AER
De 346 à 352	02 min	Individual	**VIII**	AER
De 353 à 357	01 min	Coletivo	**IX**	**Balanço do trabalho**
De 358 à 365	03 min	Individual	**X**	AER

Tabela 3 : As fases da aula relacionadas ao tipo de atividades.

[5] Atividade de Estudo e Pesquisa (Activité d'Etude et Recherche)

Podemos ver que, para atingir o seu objetivo, P2 instaura uma organização didática complexa. P2 trabalha com os seus alunos na realização de várias tarefas (e com as respectivas espécimes) procedentes da tarefa que ele propôs no início da aula. Por este motivo, a organização didática da aula se intaura através das *perguntas-respostas* que acompanham toda aula.

3. CONCLUSÃO

Para uma melhor compreensão dos estudos apresentados, ao concluir retomamos a análise de certos elementos. O que nos permitirá discutir alguns procedimentos didáticos presentes nesta aula e especificar mais detalhadamente a maneira pela qual P2 instaura alguns procedimentos didáticos.

Em relação ao saber a ser ensinado, ou seja, no que diz respeito aos dois novos objetos estudados "a distância entre dois números e valor absoluto de um número", observamos que estes são abordados de maneira bastante próxima. Assinalamos que em alguns momentos nos pareceu que os dois objetos eram tratados como sinônimos. No entanto, eles não são sinônimos, eles comportam elementos comuns. Assim como o professor, percebemos também que o objeto "valor absoluto" aparece de maneira evidente como um dos grandes obstáculos dos alunos na compreensão desta aula, assim como em outras situações dos níveis do EMS.

A noção de valor absoluto ocupa um lugar completamente à parte no EMS. Ela é introduzida nas séries iniciais do ensino fundamental 1 mas de maneira restrita, sendo retrabalhada até o ensino médio. Esta repetição pode ser devido à importância matemática desta noção e as constatações da persistência dos erros dos alunos produzidos em torno da mesma.

Sobre as situações construídas por P2 através de perguntas-respostas, nos parece importante apontar que nesta aula o professor adotou como critério a aquisição de dois saberes matemáticos ao mesmo tempo "distância entre dois números e o valor absoluto" este fato é verificado através das perguntas-respostas que conduzem todas as fases da aula. Vergnaud (1981), sublinha que não é razoável estudar separadamente a aquisição de conceitos (e procedimentos), pois, nas situações encontradas pelo aluno, os saberes são dificilmente dissociáveis. Por conseguinte, as situações cujos alunos confrontaram-se com vários objetos ao mesmo tempo implica num tratamento dos conceitos e dos procedimentos de vários tipos em estreita conexão.

Observamos também que para acompanharem a aula, é necessário que os alunos conheçam a linguagem na qual se exprime P2. Assim, o professor supõe, para ser eficaz, que os alunos possuem conhecimentos a priori extremamente próximos dos novos conhecimentos que ele esta tentendo construir.

É possível se observar também, a partir das análises apresentadas até este momento, que esta aula se compõe através de diversos conhecimentos que permitem o funcionamento e a evolução da aula como deseja P2. Por exemplo, o conhecimento sobre a diferença entre medida e comprimento, sobre a distância, sobre lógica de linguagem, etc., são alguns conhecimentos que fazem parte das exigências implícitas de P2. O funcionamento da aula torna-se então um trabalho complexo onde misturam-se diferentes conhecimentos e onde intervêm também as fronteiras possíveis de alteração entre a relação pessoal com o saber, por parte do aluno, e a parte pública que está explicitamente em causa nas relações dos alunos com P2.

A propósito das interações P2 com seus alunos, nesta aula P2 utiliza as perguntas-respostas a fim de promover a conscientização dos alunos em relação aos procedimentos que utilizam nas tarefas propostas. Estas interações entre P2 e os alunos geram efeitos sobre as aquisições importantes da aula, o que permite os alunos progredirem nestas aquisições.

No que se refere a avaliação de P2 das produções dos alunos, nos parece que o professor considera estas produções como elementos importantes no processo de aprendizagem.

Geralmente, P2 considera as intervenções feitas pelos alunos e as organiza de forma que elas possam ser compreendidas por toda a classe. P2 considera as diferentes respostas (corretas ou erradas), as marcas de incompreensão, os procedimentos efetuados, a diversidade dos resultados apresentados na classe, etc. O professor dá tempo aos alunos, de modo que eles possam procurar respostas às diferentes perguntas que lhes são feitas. Vimos também que em determinadas fases desta aula P2 faz perguntas e ele mesmo fornece as respostas às mesmas. O que denominamos *diálogos no espelho*, com estes diálogos P2 regula o ritmo da aula. Podemos interpretar esta atitude como uma estratégia para melhor guiar a institucionalização de certos objetos. Tal prática no processo de institucionalização pode ser relevante para consolidar as aquisições dos alunos. É possível interpretar também os *diálogos no espelho* como estratégias de P2 para impedir a classe de iniciar um debate em torno das respostas erradas que podem ser produzidas pelos alunos, o que certamente exigiria um tempo maior. Pode-se constatar que imediatamente após os diálogos no espelho, P2 retoma o curso através das perguntas-respostas sem que estes momentos alterem demasiadamente o desenrolar da aula.

Observamos que nesta aula os alunos são frequentemente conduzidos à fazer analogias, comparações, ou tratar problemas em domínios diferentes do qual o problema foi proposto para avançar num raciocínio, explicar ou até mesmo dar sentido aos conceitos trabalhados. Observamos também a utilização do cálculo literal para reduzir o trabalho do cálculo numérico. Em uma outra tarefa verificamos a utilização de representações gráficas através da reta graduada para trabalhar os conceitos de distância entre dois números e valor absoluto de um número. Estes são alguns exemplos destas práticas encontradas nesta aula. Porém, através das análises efetuadas até aqui constatamos que dar sentido à conceitos utilizando exemplos, comparações, analogias, não é simples nem para ser instaurado por P2, nem para a compreensão dos alunos. Pois, como sublinha Raymond Duval (1993), os objetos matemáticos como retas, números, representações algébricas, etc. não são objetos reais ou físicos, para manipulá-los os alunos devem passar pelas suas representações, mentais e semióticas. Por conseguinte, um trabalho de vigilância constante é solicitado aos professores e sobretudo aos alunos, para um encadeamento coerente entre os diferentes momentos de uma aula. Observando o nosso protocolo podemos afirmar que P2 consegue conduzir este encadeamento para transitar através dos diferentes momentos que compõem esta aula. Para isso P2 utiliza o NAG para promover mudanças de registros e de quadros. Mas nem em todas as fases P2 consegue manter tal encadeamento, o que ocasiona dificuldade em um determinado momento da aula, o que pode ser verificado através do nosso protocolo.

Observamos o NAG desempenhando um papel importante na mudança de registro. Nesta aula os alunos são convidados a compreenderem os objetos matemáticos propriamente, e não somente a sua representação, os alunos devem dominar um mesmo objeto matemático em vários registros de representação semiótica e estes registros coordenam os objetos. De acordo com Duval (1993), compreender um objeto matemático é a capacidade de reconhecê-lo em registros diferentes. A conversão de uma representação semiótica à outra pode ser assim a ocasião de se aprender. A dificuldade vem da coordenação dos registos cujas condições determinam sucesso na conversão entre os registos semióticos diferentes, o NAG nesta aula é visto como um objeto coordenador, que vai dar sentido à estas trocas.

Os assuntos que são trabalhados nesta aula são anunciados como pertencentes ao quadro numérico, mas o trabalho que observa-se nesta aula inscreve-se nos domínios numérico-algébrico e geométrico. Este trabalho utiliza pelo menos três registros de representações semióticas que vão ser introduzidos na aula a partir do trabalho da técnica para resolver a tarefa. A resolução da tarefa inicial não é um mecanismo simples, solicita ao mesmo tempo conhecimentos ligados à situações específicas e regras gerais susceptíveis de serem aplicadas à largas categorias de problemas. Constatamos que os alunos que participaram desta aula elaboraram um esquema contextualizado de resolução da tarefa. Podemos respaldar esta afirmação ao observar (que um aluno fornece a solução para um novo problema lançado por P2 de forma espontânea utilizando os conhecimentos anteriormente trabalhados.

De acordo com o nosso protocolo e o que observamos na classe, a prática de P2 se traduz em termos de alguns fenômenos didáticos anunaciados e analisados anteriormente. Estes fenômenos não parecem ser específicos à esta aula, pois vários deles ilustram dificuldades às quais são confrontados os professores e os alunos no cotidiano da sala de aula.

Constatamos uma utilização pessoal do NAG por parte de P2, o professor utiliza o NAG de maneira implícita. Nesta aula pode-se observar que a integração do NAG no processo de ensino-aprendizagem é contínua e fortemente ligada às normas previstas para a institucionalização dos objetos estudados e previstos pelas instruções oficiais. Os caminhos percorridos até a fase atual da nossa pesquisa, têm nos revelado que o NAG é um objeto fortemente presente no processo ensino-aprendizagem de Matemática no secundário, o que nos impulsionado na continuidade do nosso trabalho.

REFERÊNCIAS

BRONNER, A. (1997), *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*, Thèse de Doctorat,Université Joseph Fourier de Grenoble.

BRONNER A. (2007), Les nombres réels dans la transition collège-lycée : rapports institutionnels et milieux pour l'apprentissage, *actes du séminaire national de didactique, IREM de Paris 7.*

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. RDM Vol.7/2, éditions La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* n°19, pp 43-75.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 12.1, pp. 73-111, Éditions La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/2, La Pensée Sauvage.

DOUADY R. (1986). «Jeux de cadres et dialectique outil-objet», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, n° 2, p. 5-31.

DUVAL R. (1993). «Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée», Annales de didactique et de sciences cognitives, n°5, p.37-65, IREM de Strasbourg.

HENRIQUES, A. (2006), L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples : analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple. UJF-Grenoble, Lab. Leibniz.

FARIAS, L.M.S. e al (2007) Referências teóricas da didática francesa: Análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple. Educação Matemática Pesquisa, v. 9, p. 51-81.

MATHERON Y. (2000), Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations

Paramètres Curriculaires Nationaux : Mathématiques/Secrétariat d'Éducation Fondamentale. - Brasília : MEC/SEF, 1998. p.19/28.

VERGNAUD G. (1981) L'enfant la mathématique et la réalité ; ed. Peter Lang, Berne.