



## **CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM DE COLUNAS COMPOSTAS CONSIDERANDO A FLEXIBILIDADE POR CORTE**

Daniel de Souza Machado\*

**RESUMO:** *Este trabalho reuni conceitos e equações fundamentais para a análise da carga crítica de flambagem de barras considerando a flexibilidade por corte. Discute-se a influência do efeito da flexibilidade por corte na carga crítica de flambagem em colunas sólidas (seção transversal cheia) e compostas (formadas por barras reticuladas). Nesta última, a consideração da análise carga crítica de flambagem por corte torna-se indispensável devido às grandes deformações que ocorrem nestes tipos de barras sob ação das forças cortantes. Nas colunas sólidas a deformação por corte pode ser negligenciada. A consideração do efeito do corte na carga crítica de flambagem em colunas reticuladas depende do fator de flexibilidade ao corte que varia de acordo com a configuração de cada coluna e é apresentado neste trabalho para diversas configurações. É importante, portanto que seja feita a avaliação da carga crítica global de flambagem por corte nas colunas compostas, além da verificação local de cada barra do reticulado.*

**Palavras-chave:** flambagem por corte; colunas compostas; estruturas de aço.

### **1 INTRODUÇÃO**

Pretende-se reunir neste trabalho conceitos relevantes sobre carga crítica de flambagem de barras compostas considerando o efeito da flexibilidade por corte. A consideração da flexibilidade por corte em barras compostas (reticuladas) é significativa. Esta consideração torna-se indispensável devido às grandes deformações que ocorrem nestes tipos de barras sob ação das forças de corte. Nas colunas sólidas a deformação por corte pode ser negligenciada.

Deformações por corte podem ter um efeito adverso na resistência à flambagem de colunas, principalmente em barras compostas com enrijecedores. Uma combinação de três fatores esforços de corte em uma coluna segundo Riera (1998, p.74):

- Carga lateral, resultante de vento, gravidade ou outras causas;
- Inclinação, com respeito à linha de corte, devido tanto a curvatura inicial não intencional como a curvatura produzida durante o processo de flambagem;
- Excentricidade da carga, introduzida pelas conexões das extremidades ou por imperfeições de fabricação.

---

\* Engenheiro Civil, Mestre em Engenharia Civil, Estruturas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Professor substituto da Universidade Federal da Bahia – [machado\\_dsm@yahoo.com.br](mailto:machado_dsm@yahoo.com.br) (Autor)



A deformação por corte devido ao primeiro caso deve sempre ser calculada e acrescentada a parcela estimada para o segundo e terceiro casos. O segundo caso é muito importante em colunas esbeltas, enquanto o terceiro caso é importante em colunas curtas.

## 2 CARGA CRÍTICA PARA COLUNAS SÓLIDAS

### 2.1 Caso sem a consideração de flexibilidade por corte

Neste caso a equação da linha elástica é representada como se segue “Figura 1”:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P(\delta - y)}{EI} \quad (1)$$

P é a carga axial aplicada no eixo da coluna;

$\delta$  é o deslocamento horizontal no ponto de aplicação da carga P;

E é o módulo de elasticidade longitudinal da coluna;

I é o momento de inércia da seção.

Para colunas sólidas esta a “equação (1)” pode ser utilizada com erros desprezáveis. A carga crítica de flambagem para este caso é dada por:

$$P_{cr} = K_{cr} P_E \quad (2)$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (3)$$

onde:

$P_{cr}$  é a carga crítica de flambagem;

$K_{cr}$  é o coeficiente que representa a condição de contorno da coluna;

$P_E$  é a carga crítica elástica de Euler;

$l$  é o comprimento da coluna.

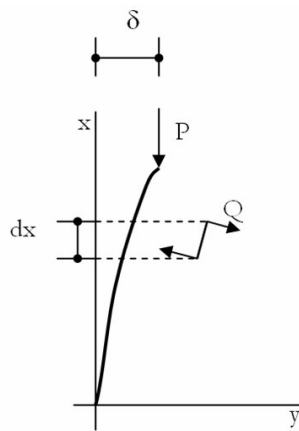


Figura 1 - Representação da deformada da coluna submetida á uma carga axial de valor P.  
onde:

## 2.2 Caso com a consideração de flexibilidade por corte

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P(\delta - y)}{EI \left( 1 + \frac{\eta P}{AG} \right)} \quad (4)$$

onde:

$\eta$  é um fator de forma que depende das características geométricas da seção transversal (é um coeficiente adimensional que depende da distribuição da tensão de corte na seção considerada;

$A$  é a área da seção transversal da coluna;

$G$  é o módulo de elasticidade transversal da coluna;

$\frac{AG}{\eta}$  é a rigidez ao corte da coluna.

Valores de  $\kappa = \frac{1}{\eta}$  para diversas formas de seção transversal podem ser encontrados em Riera *et al* (1998, p.4) ou Cowper (1966).

Observa-se que as “equações (2)” e (5)” diferem entre si no fator  $\left( 1 + \frac{\eta P}{AG} \right)$  o que representa a consideração do efeito da flexibilidade por corte através das características geométricas e do material.



A carga crítica de flambagem para este caso é dada por:

$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + \frac{\eta P_E}{AG}} \quad (5)$$

Lembrando que a carga crítica na “equação (5)” deve ser levada consideração as condições de contorno da coluna.

O fator  $\frac{1}{1 + \frac{\eta P_E}{AG}}$  na “equação (5)” para colunas sólidas é praticamente um, podendo ser

negligenciada a flexibilidade por corte. Para colunas compostas a consideração deste fator torna-se importante devido à grande flexibilidade por corte que estes tipos de barra possuem. Para colunas compostas este fator tem valores menores que um, portanto a carga crítica sempre será menor que numa coluna de seção sólida.

A “equação (5)” pode ser deduzida também através do método energético como mostrada em Timoshenko (1936).

A quantidade  $\frac{1}{P_d} = \frac{\eta}{AG}$  quando multiplicada pela força de corte, obtém-se a deflexão adicional na linha elástica.

### 3 CARGA CRÍTICA PARA COLUNAS COMPOSTAS (COM FLEXIBILIDADE POR CORTE)

#### 3.1 Por uma barra na diagonal e uma na horizontal

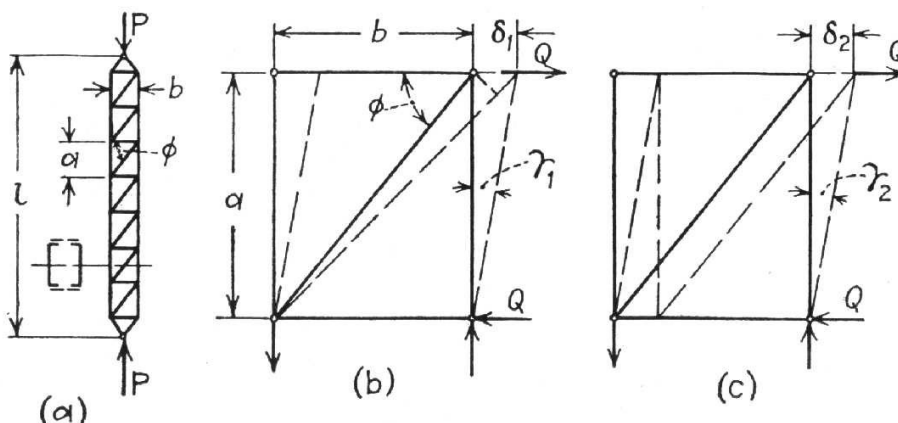


Figura 2 - Deformação causada pelo cortante num painel da coluna representada.



Para colunas compostas com uma barra na diagonal e uma na horizontal em cada painel a quantidade  $\frac{1}{P_d}$  deve ser determinada para cada caso particular de deslocamento lateral produzido pela forças de corte. Para a coluna composta da “Figura 2” esta quantidade vale:

$$\frac{1}{P_d} = \frac{1}{A_d E \sin \phi \cos^2 \phi} + \frac{b}{a A_b E} \quad (6)$$

A carga crítica pode-se ser escrita:

$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + P_E \left( \frac{1}{A_d E \sin \phi \cos^2 \phi} + \frac{b}{a A_b E} \right)} \quad (7)$$

onde:

$A_d$  é a área da seção transversal da diagonal que compõe os painéis da coluna composta;

$A_b$  é a área da seção transversal da barra horizontal que compõe os painéis da coluna composta.

Na “equação (7)”, o momento de inércia  $I$  da seção transversal para a coluna composta da é dado por:

$$I = 2I_c + \frac{A_c b^2}{2} \quad (8)$$

onde:

$A_c$  é a área da seção transversal de cada um dos perfis  $C$  verticais;

$I_c$  é o momento de inércia de cada barra em relação ao seu próprio eixo de gravidade paralelo ao eixo de flexão;

### 3.2 Por duas barras na diagonal sem barras na horizontal

Quando temos duas barras na diagonal sem barras horizontais em cada painel da coluna composta “Figura 3”, as barras diagonais estarão sujeitas, uma à compressão e a outra à tração. Sendo assim, as barras horizontais não farão parte da transmissão do esforço de corte, portanto consideraremos ( $A_b = 0$ ). O sistema trabalhará da mesma forma que o mostrado na “Figura 3b”.

Para a barra composta da “Figura 3b”  $\frac{1}{P_d}$  vale:



$$\frac{1}{P_d} = \frac{1}{A_d E \sin \phi \cos^2 \phi} \quad (9)$$

A carga crítica pode-se ser escrita para  $A_b = 0$ :

$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + P_E \left( \frac{1}{A_d E \sin \phi \cos^2 \phi} \right)} \quad (10)$$

onde:

$A_d$  é a área da seção transversal das duas diagonais que compõe os painéis da coluna composta (diferente da “equação (7)” que temos apenas uma barra diagonal);

De modo semelhante, para o sistema representado na “Figura 3c” pode ser utilizada as “equações (9) e (10)” com  $A_d$  sendo a soma das áreas da seção transversal de duas diagonais.

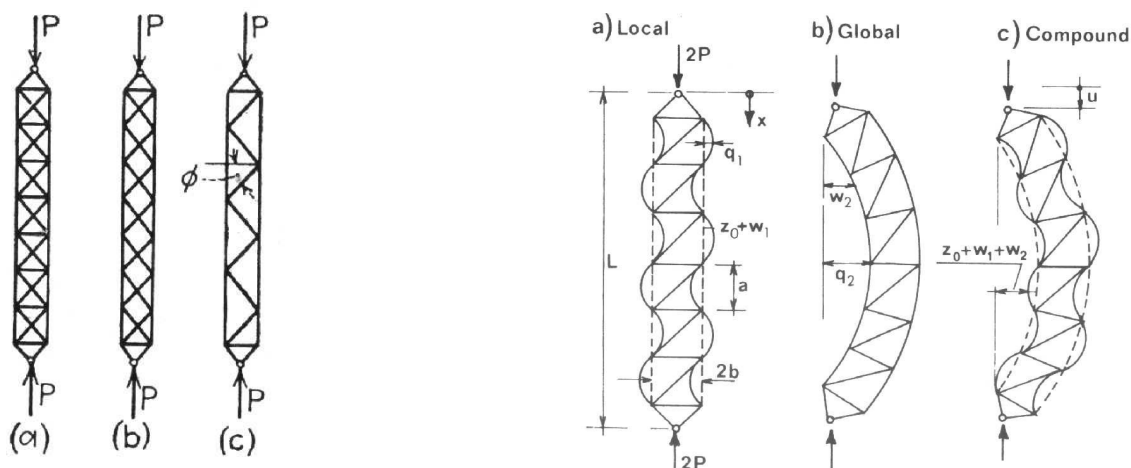


Figura 3 - À esquerda, três concepções diferentes para colunas compostas. (a) flambagem local das barras; (b) flambagem global da coluna composta; (c) flambagem composta pela global e local.

### 3.3 Por barras na horizontal sem barras diagonais

Na determinação da carga crítica em colunas compostas com barras na horizontal e sem barras diagonais pode-se considerar ou não o efeito da flambagem local da barras verticais espaçadas a cada barra horizontal. Será determinada a carga crítica nas subseções seguinte para os dois casos.



### 3.3.1 Sem a consideração de flambagem local

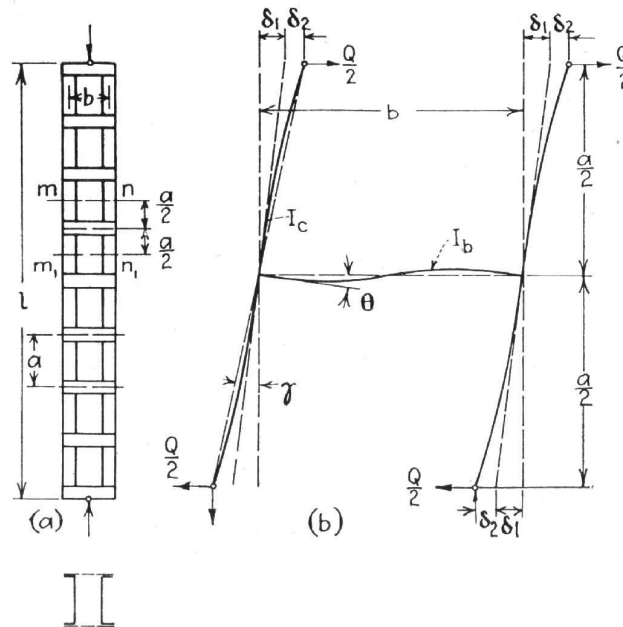


Figura 4 - Coluna composta com barras na horizontal e sem barras diagonais.

Considerando os deslocamentos devido às deformações ocorridas nas barras, horizontais e verticais, chegamos à seguinte expressão:

$$\frac{1}{P_d} = \frac{ab}{12EI_b} + \frac{a^2}{24EI_c} \quad (11)$$

A carga crítica pode-se ser escrita:

$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + P_E \left( \frac{ab}{12EI_b} + \frac{a^2}{24EI_c} \right)} \quad (12)$$

onde:

a é o comprimento das barras verticais;

b é o comprimento das barras horizontais.

Não foi considerado o corte nas barras horizontais no cálculo do ângulo produzido pela força de corte. Para consideração deste,  $P_{cr}$  vale:



$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + P_E \left( \frac{ab}{12EI_b} + \frac{a^2}{24EI_c} + \frac{\eta a}{bA_b G} \right)} \quad (13)$$

### 3.3.2 Com a consideração de flambagem local

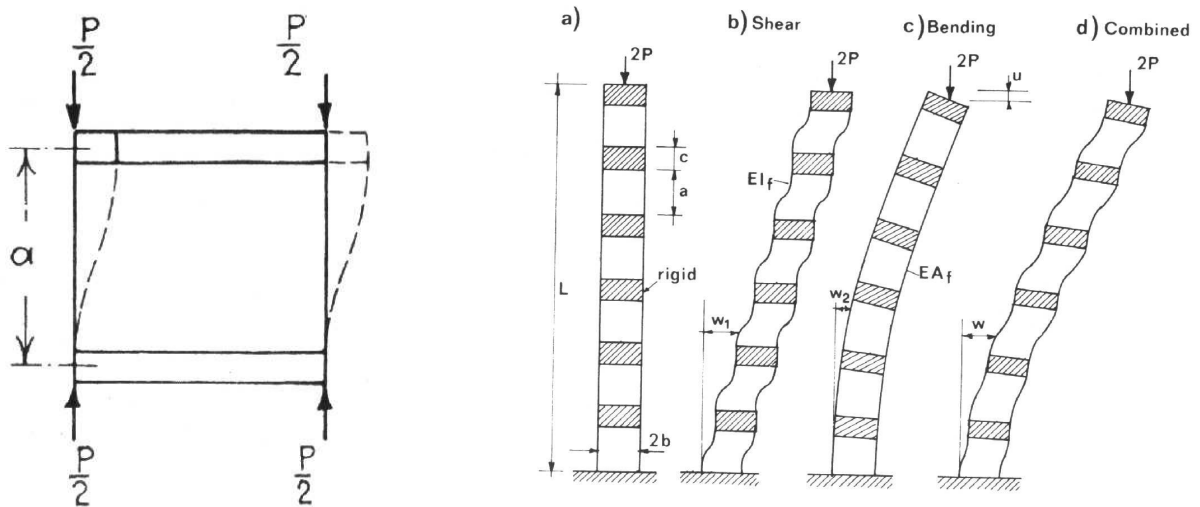


Figura 5 - Coluna composta com barras na horizontal e sem barras diagonais considerando efeito da flambagem global e, flambagem local da barras verticais.

A consideração de flambagem local deve ser levada em conta quando as barra espaçadas entre duas barras horizontais for longa o suficiente para sofrer o efeito da flambagem.

O valor crítico da força de compressão nas barras verticais é dado por:

$$P = \frac{2\pi^2 EI_c}{a^2} \quad (14)$$

Considerando essa quantidade no calculo das deformações, temos que a carga crítica na coluna composta considerando flambagem local das barras verticais é dada por:

$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + P_E \left( \frac{ab}{12EI_b} + \frac{a^2}{24EI_c} \frac{1}{(1-\alpha)} + \frac{\eta a}{bA_b G} \right)} \quad (15)$$

onde:





$$\alpha = P_{cr} / \left( \frac{2\pi^2 EI_c}{a^2} \right) \quad (16)$$

A “equação (15)” representa a carga crítica de flambagem da coluna composta levando em consideração a flambagem local das barras verticais. A solução desta equação só é alcançada por métodos, de tentativa e erro ou iterativo.

#### 4 DETERMINAÇÃO DE $P_{CR}$ ATRAVÉS DO PARÂMETRO DE FLEXO-CORTE

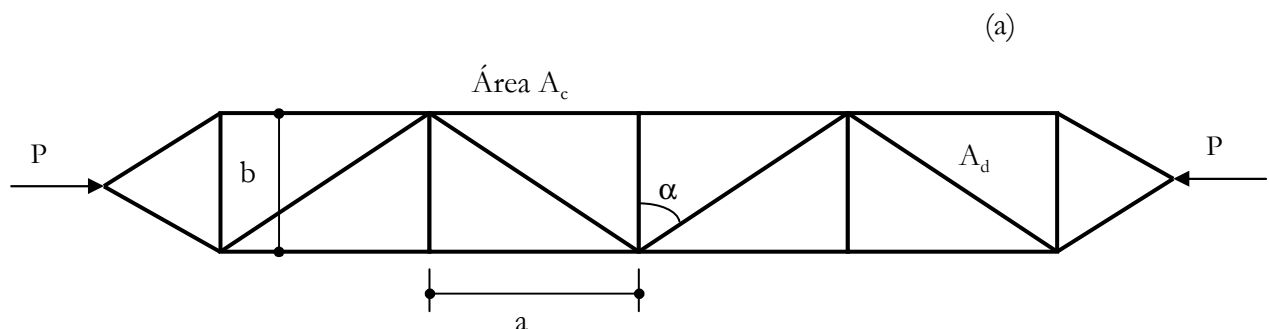
Galambos (1976) definiu uma expressão para a determinação do parâmetro de flexo-corte, “equação (17)” e “Figura 6”:

$$\mu = \frac{\xi_b}{1 + \xi_a} \left( \frac{b}{L} \right)^2 \frac{A_c}{A_d} \left( \frac{b}{a\xi_a} \left( 1 + \left( \frac{a\xi_a}{b} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{b}{a\xi_a} \frac{A_d}{A_b} \right) \quad (17)$$

onde:

$\xi_a$  e  $\xi_b$  são definidos como descreve Galambos (1976).

A partir do parâmetro de flexo-corte define-se a carga crítica a partir de ábaco mostrado por Galambos (1976) em função da carga de Euler, condições de apoio e a presença ou não de placas situadas nos extremos da barra.



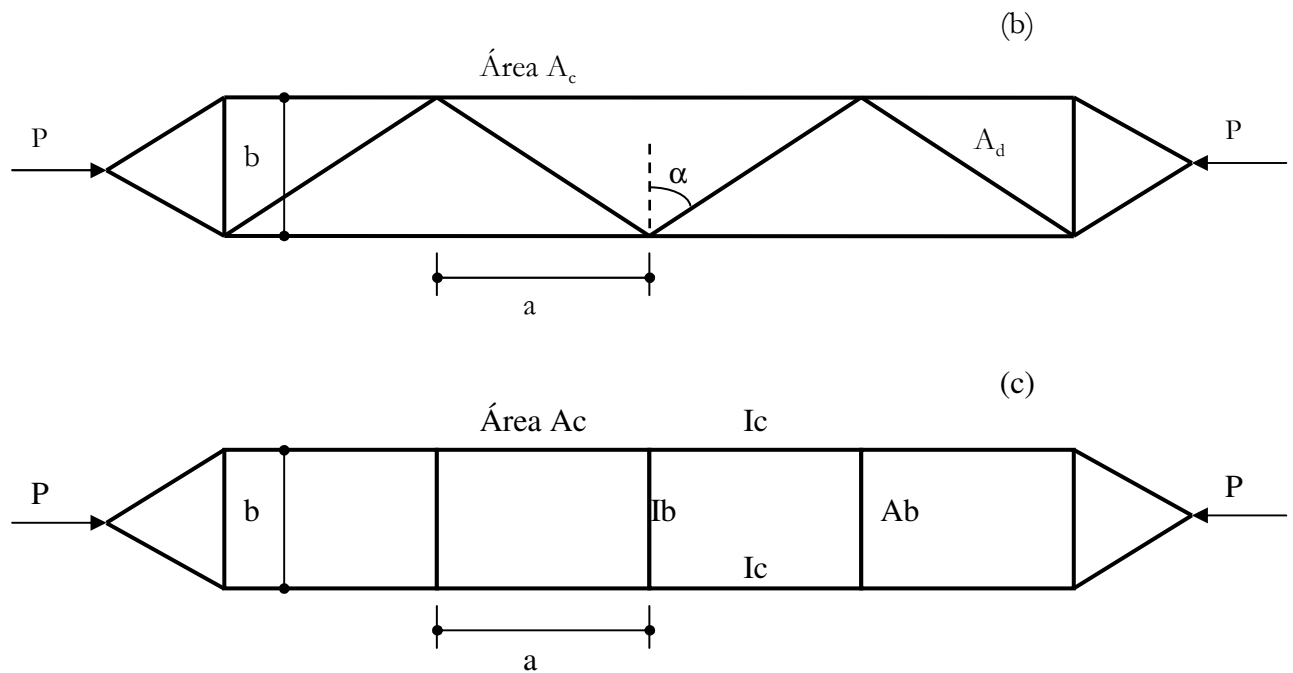


Figura 6 - Colunas reticuladas com barras horizontais e diagonais.

O parâmetro de flexo-corte pode ser dado segundo Riera et al (1971) para “Figura 6a” e “Figura 6b” é dado por:

$$\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{L} \right)^2 \frac{A_c}{A_d \cos^2 \alpha \sin \alpha} \quad (18)$$

ou segundo Timoshenko e Gere (1961) para a “Figura 6c”:

$$\mu = \frac{A_c}{2} \left( \frac{b}{L} \right)^2 \left[ \frac{ab}{12I_b} + \frac{a^2}{24I_c} \right] \quad (19)$$



## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho reuniu conceitos e equações determinantes da carga crítica de flambagem de barras considerando o efeito da flexibilidade por corte. Foi discutido o efeito da flexibilidade por corte na carga crítica de flambagem de colunas sólidas (seção transversal cheia) e compostas (formadas por barras reticuladas). Nas barras (colunas) compostas, devem ser feitas a verificações globais e locais considerando o efeito da flexibilidade por corte.

## 6 REFERÊNCIAS

ALLEN, H. G. **Background to buckling**. Ed. McGraw-Hill. London, UK, 1980.

CEDOLIN, L. **Structural stability**. Oxford University Press, inc. New York, USA, 1991.

GAYLORD E. H. **Design of steel structures**. McGraw-Hill Civil Engineering Series. New York, USA, 1957.

RIEIRA, J D. MENEZES, R. C. R. CABRAL S. V. S.. **Estabilidade de Sistemas Estruturais**. Relatório 01/98. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 1998.

TIMOSHENKO, S. P. **Theory of elastic stability**, Ed. McGraw-Hill, New York, USA, 1936.