

APLICATIVO COMPUTACIONAL PARA CÁLCULO DA ÁREA SUPERFICIAL E AVALIAÇÃO DE SUA QUALIDADE MÉTRICA

Luiz Carlos Almeida de Andrade Fontes^{*}
Artur Caldas Brandão^{**}
Abel Vicente Filho^{***}

RESUMO: *Os avanços tecnológicos relacionados aos processos de medições topográficas e geodésicas com o uso cada vez mais freqüente de equipamentos do tipo estação total topográfica e do posicionamento por satélites (GPS) possibilitaram o aprimoramento da qualidade métrica das medições. Aliando-se ao avanço, torna-se necessária a determinação da qualidade métrica de todos os elementos que caracterizam geometricamente os detalhes mapeados - distância entre pontos, azimutes de alinhamentos, ângulos entre alinhamentos, coordenadas de pontos e área superficial de polígonos. Neste estudo, aborda-se a necessidade de se caracterizar a qualidade métrica da área superficial de polígonos fechados mediante um indicador estatístico. O cálculo da área superficial é executado pela Fórmula de Gauss, a partir dos valores das coordenadas dos pontos que definem o polígono. O indicador estatístico da qualidade métrica da área é obtido pelo cálculo do erro médio quadrático, considerando a propagação dos erros decorrentes da precisão posicional dos pontos que definem vértices do polígono e da respectiva configuração geométrica. A precisão posicional dos pontos de um levantamento é obtida a partir da matriz variância co-variância dos parâmetros ajustados, considerando um determinado nível de confiabilidade. Para alcançar esses objetivos, foi desenvolvido um aplicativo pelo Laboratório de Geomensura da Escola Politécnica - UFBA para o cálculo da área e do respectivo erro médio quadrático da área em linguagem de programação Visual Basic. Os resultados alcançados nesta etapa do estudo demonstram a utilidade do aplicativo, por sua simplicidade e eficácia na obtenção dos valores da área e do parâmetro indicativo da qualidade métrica.*

Palavras-chave: Medições topográficas; Área superficial, Qualidade métrica da área superficial

INTRODUÇÃO

Os avanços tecnológicos relacionados aos processos de medições topográficas e geodésicas com o uso cada vez mais freqüente de equipamentos do tipo estação total topográfica e do posicionamento por satélites (GPS) possibilitaram o aprimoramento da qualidade métrica das medições. Aliando-se ao avanço, torna-se necessária a determinação da qualidade métrica de todos os elementos que caracterizam geometricamente os detalhes mapeados - distância entre pontos, azimutes de alinhamentos, ângulos entre alinhamentos, coordenadas de pontos e área superficial de polígonos. Neste estudo, aborda-se a necessidade de se caracterizar a qualidade métrica da área superficial de polígonos fechados mediante um indicador estatístico. O cálculo da área superficial é executado pela Fórmula de Gauss, a partir dos valores das coordenadas dos pontos que definem o polígono. O indicador estatístico da qualidade métrica da área é obtido pelo cálculo do erro médio quadrático, considerando a propagação dos erros decorrentes da

^{*} Professor, Mestre da Escola de Engenharia da Universidade Católica do Salvador – UCSal e da Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia – UFBA. E-mail: lfontes@atarde.com.br.

^{**} Professor, Doutor da Escola Politécnica da UFBA. E-mail: acaldas@ufba.br.

^{***} Mestrando da Escola Politécnica da UFBA.



precisão posicional dos pontos que definem vértices do polígono e da respectiva configuração geométrica.

Para alcançar esses objetivos, foi desenvolvido um aplicativo pelo Laboratório de Geomensura da Escola Politécnica - UFBA para o cálculo da área da parcela territorial e do respectivo erro médio quadrático da área em linguagem de programação Visual Basic.

CÁLCULO DA ÁREA DA PARCELA TERRITORIAL

O cálculo da área superficial (S) de uma parcela territorial definida pelas coordenadas cartesianas $(X_i, Y_i), i=1, \dots, n$ dos pontos de limites do polígono correspondente é dada pela conhecida e denominada Fórmula de Gauss:

$$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n Y_i X_{i+1} - \sum_{i=1}^n X_i Y_{i+1} \right) \quad (1)$$

sendo n a quantidade de vértices do polígono e o vértice $i+1 = n$ coincidente com o vértice $i=1$.

QUALIDADE MÉTRICA DA ÁREA SUPERFICIAL

Conforme discutido por Brandão (2003, p.63), a caracterização geodésica de uma parcela territorial não se restringe somente às precisões posicionais, sendo necessária também a determinação da qualidade métrica dos demais elementos que caracterizam geometricamente a parcela - distâncias dos alinhamentos limites, azimutes de alinhamentos limites, ângulos entre alinhamentos limites, área da parcela. Portanto numa medição topográfica para caracterizar áreas de parcelas territoriais, de modo particular em regiões do ambiente rural, a determinação da qualidade métrica da área por meio de um indicador estatístico é importante para atender à exigência legal do Decreto 4.449/2002. Ou seja, à luz da legislação vigente, a qualidade métrica da área possibilita a verificação do erro máximo admissível de um vigésimo ou de 5% na determinação da área de um imóvel, conforme estabelecido no Código Civil Brasileiro - Lei 10.406, de 10/01/2002. Importante salientar que não se tem garantia dessa verificação somente com a determinação das coordenadas dos pontos que definem os limites dos imóveis com precisões posicionais melhores que $\pm 0,50m$. Isso porque a qualidade métrica da área depende não somente da precisão posicional dos pontos de limites, mas também da extensão do imóvel e de sua forma geométrica.

Indicadores da precisão posicional

No processo de medição, a precisão posicional dos pontos de um levantamento é obtida a partir da matriz variância co-variância (MVC) dos parâmetros ajustados, considerando uma determinada probabilidade ou nível de confiabilidade. A MVC dos parâmetros ajustados consiste numa matriz do tipo:

$$\Sigma_{X_a} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1Y_1} & \sigma_{X_1X_2} & \sigma_{X_1Y_2} & \dots & \sigma_{X_1X_n} & \sigma_{X_1Y_n} \\ \sigma_{X_1Y_1} & \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1X_2} & \sigma_{Y_1Y_2} & \dots & \sigma_{Y_1X_n} & \sigma_{Y_1Y_n} \\ \sigma_{X_1X_2} & \sigma_{Y_1X_2} & \sigma_{X_2}^2 & \sigma_{X_2Y_2} & \dots & \sigma_{X_2X_n} & \sigma_{X_2Y_n} \\ \sigma_{X_1Y_2} & \sigma_{Y_1Y_2} & \sigma_{X_2Y_2} & \sigma_{Y_2}^2 & \dots & \sigma_{Y_2X_n} & \sigma_{Y_2Y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{X_1X_n} & \sigma_{Y_1X_n} & \sigma_{X_2X_n} & \sigma_{Y_2X_n} & \dots & \sigma_{X_n}^2 & \sigma_{X_nY_n} \\ \sigma_{X_1Y_n} & \sigma_{Y_1Y_n} & \sigma_{X_2Y_n} & \sigma_{Y_2Y_n} & \dots & \sigma_{X_nY_n} & \sigma_{Y_n}^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde,

$\sigma_{x_i}^2$: variância da coordenada x de um ponto i.

$\sigma_{y_i}^2$: variância da coordenada y de um ponto i.

$\sigma_{x_iy_i}$, $\sigma_{x_jy_j}$, $\sigma_{x_iy_j}$, $\sigma_{x_jy_i}$, $\sigma_{x_ix_j}$, $\sigma_{y_iy_j}$: covariâncias

A variância de um valor de coordenada ou de uma observação é uma medida estatística da confiabilidade desse valor. A covariância é uma medida de dependência estatística entre dois valores. No âmbito da geodésia, a covariância pode estar relacionada a duas observações ou a um par de valores de coordenadas (X e/ou Y) pertencentes a um ou dois pontos. A covariância é nula quando as componentes relacionadas são estatisticamente independentes, sem que a recíproca seja necessariamente verdadeira. Quando a covariância for igual a 1, significa correlação perfeita. Normalmente, em um ajustamento de um levantamento, usando o mesmo conjunto de observações, as componentes estão correlacionadas.

A precisão de uma observação ou de uma coordenada, pode ser indicada: pela sua variância σ^2 , pelo seu desvio-padrão $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$, ou em termos mais geodésicos pelo erro médio quadrático (mean square error) $m = \sqrt{\sigma^2}$ com o duplo sinal.

Demonstra-se, com base na função de distribuição de probabilidade da curva normal, que o erro médio quadrático representa uma probabilidade (nível de confiabilidade) de 68,3% de que a diferença entre o valor considerado, observado ou ajustado, e seu valor estimado como verdadeiro se encontra no intervalo compreendido entre $+\sigma$ e $-\sigma$. Para aumentar o nível de confiabilidade para 95% ou 99%, usuais em geodésia, deve-se multiplicar o erro médio quadrático (m) por 1,96 ou 2,58 respectivamente. O erro médio quadrático (m) de uma coordenada X ou Y de um ponto descreve a precisão posicional do ponto com respeito somente às direções dos eixos X e Y do sistema de referência. Geralmente deseja-se conhecer o erro médio quadrático máximos e mínimos e suas direções, que podem ser calculadas a partir de elipses de confiança (GEMAEL, 1994, p.76).



Qualidade métrica das linhas de limites de parcelas

Além dos indicadores de precisão posicional apresentados anteriormente, a matriz variância co-variância (MVC) dos parâmetros ajustados (Σ_{x_a}) possibilita também o cálculo dos indicadores de precisão relacionadas a quantidades derivadas das coordenadas ajustadas de um levantamento, conforme discutido em Brandão (2003, p. 75). O indicador estatístico da qualidade métrica de uma quantidade derivada das coordenadas ajustadas é o denominado erro médio quadrático. O seu valor é obtido pela propagação dos erros decorrentes da precisão posicional dos pontos que definem os limites de parcelas e da configuração geométrica dos pontos considerados. Com isso, pode-se determinar o erro médio quadrático correspondente à distância entre dois pontos, ao azimute de um alinhamento, à direção qualquer entre dois pontos, ao ângulo entre três pontos e à área da parcela.

Qualidade métrica da área superficial

O indicador estatístico da qualidade métrica da área superficial da parcela é o erro médio quadrático da área (m_s), obtido a partir da propagação dos erros decorrentes da precisão posicional dos pontos que definem os limites de parcelas e da configuração geométrica da parcela.

$$m_s = \sqrt{\Sigma_s} \quad (3)$$

onde,

m_s : erro médio quadrático da área superficial da parcela territorial

Σ_s : matriz variância da área que consiste num escalar.

O cálculo da matriz variância da área (Σ_s) é realizado através da propagação das covariâncias das coordenadas dos pontos que definem os limites de parcela territorial (GEMAEL, 1994, p.83; WOLF, 1997, p.34):

$$\Sigma_s = A \Sigma_{x_a} A^T \quad (4)$$

onde,

A : matriz das derivadas parciais da função área (S) em relação aos parâmetros $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$

Σ_{x_a} : matriz variância covariância das coordenadas ajustadas

A matriz A é obtida por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial X_1} & \frac{\partial S}{\partial Y_1} & \frac{\partial S}{\partial X_2} & \frac{\partial S}{\partial Y_2} & \dots & \frac{\partial S}{\partial X_n} & \frac{\partial S}{\partial Y_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sendo as derivadas parciais da função de área S em relação aos parâmetros $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$:



$$\frac{\partial S}{\partial X_i} = \frac{1}{2}(Y_{i-1} - Y_{i+1}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial Y_i} = \frac{1}{2}(X_{i+1} - X_{i-1}) \quad (7)$$

A matriz variância covariância das coordenadas ajustadas (Σ_{X_a}) é resultante do ajustamento da medição cadastral pelo método dos mínimos quadrados e apresentada na seção intitulada Indicadores da precisão posicional.

Aplicativo computacional para cálculo da área superficial e do respectivo erro médio quadrático

Para possibilitar a aplicação prática do cálculo da área de uma parcela territorial e do seu respectivo erro médio quadrático, foi desenvolvido pelos alunos da disciplina **ENG212 Técnicas de Geomensura** (Turma 2003.2) e aperfeiçoado pelo Laboratório de Geomensura Theodoro Sampaio – LABGEO, da Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia, um aplicativo em linguagem de programação C++. A seguir, lista-se o programa-fonte correspondente:

PROGRAMA- FONTE

```
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
void main(void)
{
    int quant, i, q, j;
    float x[500], y[500], des[1000], s[50][50], s1[1000];
    float soma2, soma1;
    float areaa, fim;
    printf ("UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA \n");
    printf (" \n");
    printf ("ESCOLA POLITECNICA \n");
    printf (" \n");
    printf ("Laboratório de Geomensura \n");
    printf (" \n");
    printf ("CÁLCULO DA AREA E DO RESPECTIVO ERRO MEDIO QUADRATICO
\n");
    printf (" \n");
    printf ("Digite a quantidade de pontos: ");
    scanf ("%d", &quant);
    q=2*quant;
    i=2;
    while (i<=quant+1) {
        printf ("Ponto %d \n",i-1);
        printf ("Coordenada x: ");
        scanf ("%f", &x[i]);
        printf (" \n");
```



```
printf ("Coordenada y: ");
scanf ("%f", &y[i]);
printf ("\n");
i=i+1;
}
x[i]=x[2];
y[i]=y[2];
x[1]=x[i-1];
y[1]=y[i-1];
soma1=0;
i=2;
while (i<=quant+1) {
    soma1=soma1+(y[i]*x[i+1]);
    i++;
}
soma2=0;
i=2;
while (i<=quant+1) {
    soma2=soma2+(x[i]*y[i+1]);
    i++;
}
areaa=(soma1-soma2)/2;
i=2;
j=1;
while (i<=quant+1) {
    des[j]=(y[i-1]-y[i+1])/2;
    i=i+1;
    j=j+2;
}
i=2;
j=2;
while (i<=quant+1) {
    des[j]=(x[i+1]-x[i-1])/2;
    i=i+1;
    j=j+2;
}
printf ("Dados da MVC - matriz variância covariância");
printf ("\n");
i=1;
while (i<=q) {
    j=1;
    while (j<=q) {
        printf ("Digite elemento (%d,%d) da matriz: ",i,j);
        scanf ("%f", &s[i][j]);
        printf ("\n");
        j=j+1;
    }
    i=i+1;
}
i=1;
```



```
while (i<=q) {
    j=1;
    while (j<=q) {
        s1[i]=s1[i]+(des[j]*s[j][i]);
        j=j+1;
    }
    i=i+1;
}
i=1;
while (i<=q) {
    fim=fim+(des[i]*s1[i]);
    i=i+1;
}
if (areaa<0) {
    areaa=areaa*(-1);
}
if (fim<0) {
    fim=fim*(-1);
}
fim=sqrt(fim);
printf ("\n");
printf ("Area do poligono: %f Desvio da area: %f",areaa,fim);
getchar();
)
)
)
```

CONCLUSÃO

Os resultados alcançados nesta etapa do estudo demonstram a utilidade do aplicativo, por sua simplicidade e eficácia na obtenção dos valores da área e do parâmetro indicativo da qualidade métrica.

O aplicativo desenvolvido poderá ser empregado para qualquer que seja a quantidade de vértices do contorno poligonal definido no processo de medição no campo. Cópia deste aplicativo poderá ser disponibilizada mediante solicitação aos autores.

REFERÊNCIAS

BRANDÃO, A.C. **O Princípio da Vizinhança Geodésica no Levantamento Cadastral de Parcelas Territoriais**. Tese de Doutorado (no prelo) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2003.

BRASIL. Lei 10.267, de 28 de agosto de 2001. Altera dispositivos das Leis nos 4.947, de 6 de abril de 1966, 5.868, de 12 de dezembro de 1972, 6.015, de 31 de dezembro de 1973, 6.739, de 5 de dezembro de 1979, 9.393, de 19 de dezembro de 1996, e dá outras providências.

BRASIL, Decreto 4.449 de 30 de outubro de 2002. Regulamenta a Lei 10.267 de 28/08/2001.



GEMAEL, C. **Introdução ao Ajustamento de Observações** – Aplicações Geodésicas. Editora UFPR. Curitiba, 1994. 319p.

WOLF, P. R., GHILANI, C. D. **Adjustment Computations** – Statistics and Least Squares in Surveying and GIS. John Wiley & Sons. 1997